

Modelowanie szeregów czasowych cen i stóp zwrotu

Iwona Kowalska

Modelowanie finansowych szeregów czasowych zajmuje, z uwagi na ich specyficzne właściwości, szczególne miejsce w literaturze ekonometrii. Przedmiotem analizy i modelowania w prezentowanym opracowaniu są szeregi cen spot i futures koncentratu pomarańczowego, ale wnioski z analizy mogą znaleźć zastosowanie także do innych produktów rolnych notowanych na światowych giełdach towarowych.

Wyniki przedstawionej analizy empirycznej pozwalają na weryfikację przedstawionych w literaturze właściwości finansowych szeregów finansowych. Analiza opiera się na dziennych szeregach cen spot i futures oraz wyznaczonych dla nich stóp zwrotu. Ponadto została sprawdzona możliwość estymacji zależności między cenami spot i futures za pomocą modeli statycznych z powodu ich dużej popularności i możliwości praktycznego zastosowania.

1. Wstęp – specyfika finansowych szeregów czasowych

Analizy ilościowe cen instrumentów finansowych były podstawą m.in. twierdzenia o błędzeniu przypadkowym cen i hipotezy o efektywności rynków finansowych. Kolejne badania empiryczne wyników giełdowych wskazały jednak, że zmiany cen nie mogą być opisane rozkładem normalnym. Literatura przedmiotu zwraca zwłaszcza uwagę na występowanie efektu leptokurtozy i grubych ogonów. W praktyce oznacza to wzrost prawdopodobieństwa pojawiania się bardzo dużych czy też bardzo małych wartości w porównaniu z rozkładem normalnym.

Badania wykazały także zmienność zróżnicowania w czasie, tzn. zależność wariancji od wcześniejszych realizacji. Efekt skupiania się zmienności w szeregach oznacza, że okresy małej i dużej zmienności procesu występują naprzemiennie. O ewolucji zmienności cen instrumentów finansowych w czasie, jej silnej persystencji i tendencji do tworzenia skupisk można znaleźć informacje w wielu pracach, m.in. (Mandelbrot 1963) oraz (Engle 1982).

Szeregi instrumentów finansowych charakteryzują się także efektem dźwigni, czyli asymetrycznego wpływu informacji pozytywnych i negatywnych

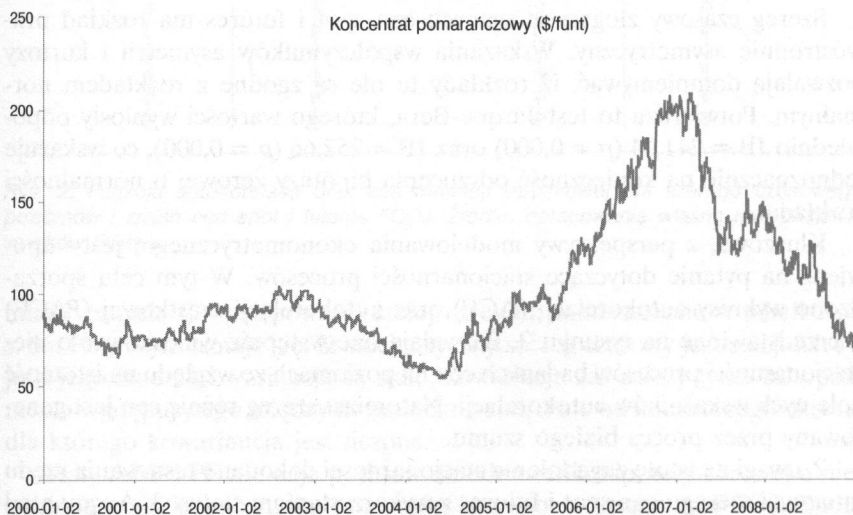
na poziom przyszłej wariacji. Wyraża się to występowaniem ujemnej korelacji zmian cen instrumentów finansowych ze zmianami ich wariacji (Piontek 2004). Efekt dźwigni charakteryzuje się tym, że zmienność rośnie w odpowiedzi na złe wiadomości i spada jako reakcja na dobre wiadomości.

Istotnym zagadnieniem jest ponadto występowanie w finansowych szeregach czasowych efektu autokorelacji. Badania empiryczne wskazują, iż w przypadku dużej częstotliwości danych (np. dziennych stóp zwrotu) autokorelacja zazwyczaj nie występuje, podczas gdy jest problemem w analizach opartych na danych o mniejszej częstotliwości (np. stopach zwrotu obliczanych na podstawie danych tygodniowych lub miesięcznych) (Cont 2001). Obecność autokorelacji w szeregu stóp zwrotu może świadczyć o słabej efektywności rynku.

Wspominane właściwości finansowych szeregów czasowych zostaną zbadać na przykładzie szeregów cen spot i futures kontraktów na FCOJ (*frozen concentrated orange juice*) oraz ich stóp zwrotu. Analiza taka jest niezbędna w celu poprawnej estymacji modeli z wykorzystaniem szeregów cen spot i futures oraz poszukiwania zależności między nimi.

2. Analiza szeregów dziennych cen spot i futures

Analizowane szeregi cen mrożonego koncentratu pomarańczowego notowanego na Intercontinental Exchange (ICE) w latach 2000–2008 przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Ceny spot kontraktów na mrożony koncentrat pomarańczowy (FCOJ). Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Bloomberg.

Zmienność cen koncentratu pomarańczowego, podobnie jak innych produktów rolnych, jest wynikiem zróżnicowanych przyczyn zmienności – szczególnie nieprzewidywalnych wahań podaży. Znajduje to odzwierciedlenie w trudności przewidywania cen i sposobach modelowania takich szeregów czasowych.

W tabeli 1 przedstawiono podstawowe charakterystyki dotyczące kształtowania się dziennych zlogarytmowanych wartości cen spot i futures, które zostaną wykorzystane do dalszej analizy.

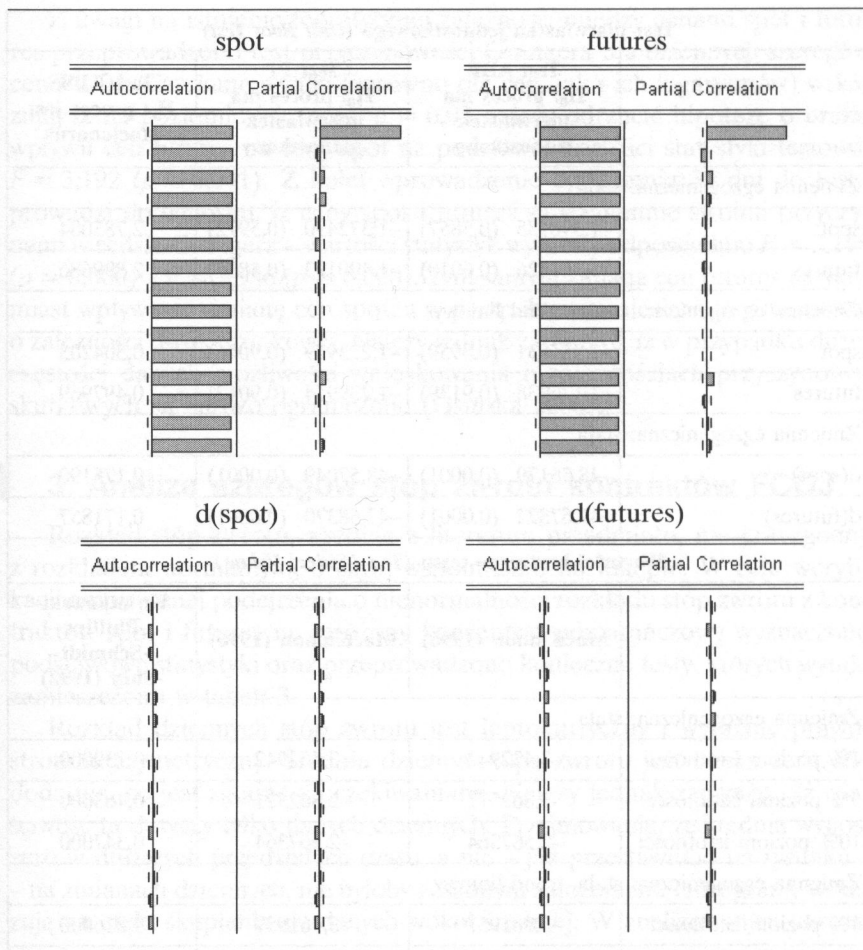
Charakterystyka	Spot (nearby)	Futures (2nd-nerby)
Średnia	4,587929	4,602663
Mediana	4,510860	4,513055
Minimum	4,000949	4,039536
Maksimum	5,340419	5,331027
Odchylenie standardowe	0,313924	0,302030
Skośność	0,652238	0,668035
Kurtoza	2,697403	2,692430

Tab. 1. Podstawowe charakterystyki dziennych cen spot i futures (wyrażone w logarytmach).
Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników Eviews.

Szereg czasowy zlogarytmowanych cen spot i futures ma rozkład prawostronnie asymetryczny. Wskazania współczynników asymetrii i kurtozy pozwalają domniemywać, iż rozkłady te nie są zgodne z rozkładem normalnym. Potwierdza to test Jarque-Bera, którego wartości wyniosły odpowiednio $JB = 241,04$ ($p = 0,000$) oraz $JB = 252,66$ ($p = 0,000$), co wskazuje jednoznacznie na konieczność odrzucenia hipotezy zerowej o normalności rozkładu.

Kluczowa, z perspektywy modelowania ekonometrycznego, jest odpowiedź na pytanie dotyczące stacjonarności procesów. W tym celu sporządzono wykresy autokorelacji (ACF) oraz autokorelacji cząstkowej (PACF) – przedstawione na rysunku 2. Pozwalają one wstępnie wnioskować o niestacjonarności procesów badanych cen na poziomach ze względu na istotność kolejnych wskaźników autokorelacji. Natomiast szereg różnic cen jest generowany przez proces białego szumu.

Z uwagi na istotę zagadnienia stacjonarności dokonano testowania rzędu integracji szeregu cen spot i futures z wykorzystaniem statystyk Augmented Dickey-Fuller (ADF), Philips-Perrson (PP) oraz Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS). Wartości obliczonych statystyk testowych i odpowiadające im wartości krytyczne, zależne od uwzględnionych składników deter-



Rys. 2. Funkcja autokorelacji oraz autokorelacji cząstkowej dla szeregu czasowego poziomów i zmian cen spot i futures FCOJ. Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników Eviews.

ministycznych, tj. występowania stałej i trendu, zamieszczono w tabeli 2 na s. 66. Przy czym uznaje się, iż stochastyczny szereg czasowy jest stacjonarny, jeśli jego średnia i wariancja są stałe, kowariancja zaś zależy tylko od opóźnienia występującego między dwoma okresami, a nie od konkretnego okresu, dla którego kowariancja jest liczona.

Testy ADF i PP nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o niestacjonarności w przypadku poziomów cen spot i futures na FCOJ. Badanie pierwszych różnic daje jednak podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej na rzecz hipotezy alternatywnej, czyli procesy te są zintegrowane w stopniu pierwszym. Wyniki testu KPSS prowadzą do podobnych wniosków, gdyż

Test pierwiastka jednostkowego (Unit Root Test)			
	Test ADF H₀: proces ma pierwiastek jednostkowy	Test PP H₀: proces ma pierwiastek jednostkowy	Test KPSS H₀: proces jest stacjonarny
Zmienna egzogeniczna: stała			
spot	-1,396135 (0,5857)	-1,372490 (0,5972)	2,785084
futures	-1,364826 (0,6010)	-1,400193 (0,5837)	2,899686
Zmienna egzogeniczna: stała, trend liniowy			
spot	-1,264031 (0,8959)	-1,223929 (0,9046)	0,504203
futures	-1,176938 (0,9139)	-1,239974 (0,9012)	0,497969
Zmienna egzogeniczna: stała			
d(spot)	-48,56179 (0,0001)	-48,57049 (0,0001)	0,175190
d(futures)	-47,67822 (0,0001)	-47,68370 (0,0001)	0,171857
Wartości krytyczne testu (Test Critical Values)			
	MacKinnon (1996)	MacKinnon (1996)	Kwiatkowski- -Phillips- -Schmidt- -Shin (1992)
Zmienna egzogeniczna: stała			
1% poziom istotności	-3,432942	-3,432942	0,739000
5% poziom istotności	-2,862571	-2,862571	0,463000
10% poziom istotności	-2,567364	-2,567364	0,347000
Zmienna egzogeniczna: stała, trend liniowy			
1% poziom istotności	-3,961957	-3,961957	0,216000
5% poziom istotności	-3,411724	-3,411724	0,146000
10% poziom istotności	-3,127743	-3,127743	0,119000
Zmienna egzogeniczna: stała			
1% poziom istotności	-3,432943	-3,432943	0,739000
5% poziom istotności	-2,862572	-2,862572	0,463000
10% poziom istotności	-2,567365	-2,567365	0,347000

Tab. 2. Badanie stacjonarności szeregów spot i futures dla danych dziennych. Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników Eviews.

hipoteza zerowa zakładająca stacjonarność została odrzucona dla poziomów zmiennej i nie ma podstaw do jej odrzucenia dla pierwszych różnic. W efekcie wszystkie z zastosowanych testów potwierdzają, iż szeregi cen spot i futures na FCOJ są stacjonarne po obliczeniu pierwszych różnic, tj. $I(1)$.

Z uwagi na istnienie teoretycznej zależności między cenami spot i futures przeprowadzono test przyczynowości Grangera dla dziennych szeregów cen FCOJ. Uzyskane wyniki (zarówno dla cen, jak i ich logarytmów) wskazują, iż na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ należy odrzucić hipotezę o braku wpływu cen futures na ceny spot na podstawie wartości statystyki testowej $F = 3,192$ ($p = 0,041$). Z kolei wprowadzenie opóźnienia 30 dni do testu prowadzi do wniosku, iż ceny spot i futures są wzajemnie swoimi przyczynami w sensie Grangera – wartości statystyk wyniosły odpowiednio $F = 2,198$ ($p = 0,000$) i $F = 2,948$ ($p = 0,000$). Tym samym zmiana cen futures natychmiast wpływa na zmianę cen spot, a w perspektywie miesiąca można mówić o zależności dwukierunkowej. Należy jednak zauważyć, iż w przypadku dużej częstości danych możliwości wnioskowania o zależnościach przyczynowo-skutkowych są bardzo ograniczone (Osińska 2006).

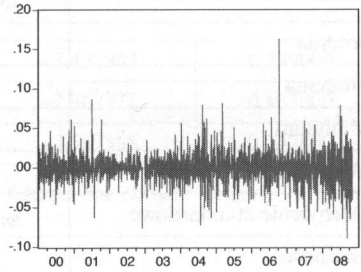
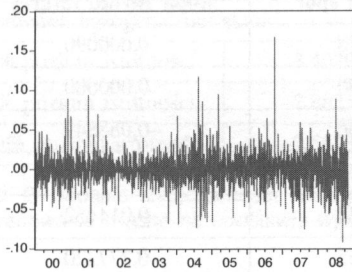
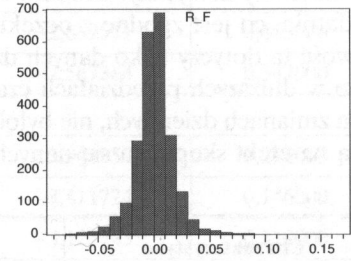
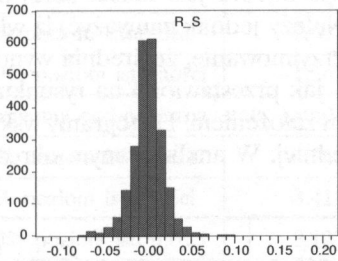
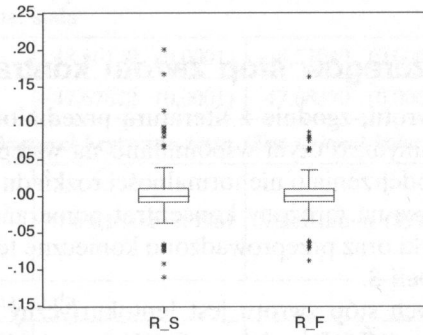
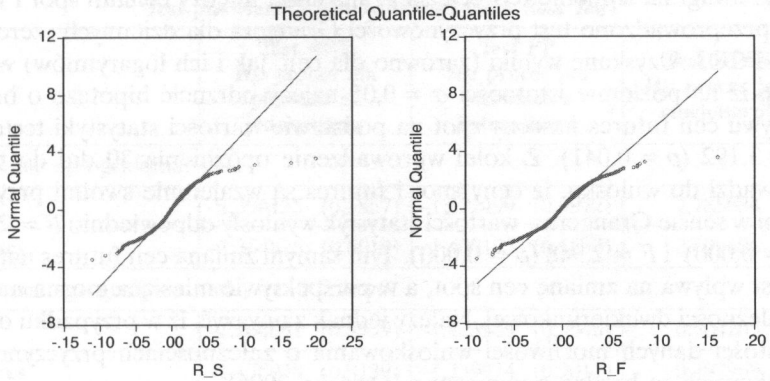
3. Analiza szeregów stóp zwrotu kontraktów FCOJ

Rozkład stóp zwrotu, zgodnie z literaturą przedmiotu, nie jest zgodny z rozkładem normalnym, o czym wspomniano na wstępie. W celu weryfikacji empirycznej podejrzenia o nienormalności rozkładu stóp zwrotu z kontraktów spot i futures na mrożony koncentrat pomarańczowy wyznaczono podstawowe statystyki oraz przeprowadzono konieczne testy, których wyniki zamieszczono w tabeli 3.

Rozkład dziennych stóp zwrotu jest leptokurtyczny i wyraźnie prawostronnie asymetryczny. Średnia dzienna stopa zwrotu jest bliska zeru, ale dodatnia, co jest zgodne z oczekiwaniami. Należy jednak zauważyć, iż właściwość ta dotyczy tylko danych dziennych. Przyjmowanie, że średnia wynosi zero w dłuższych przedziałach czasu, a nie – jak przedstawiono na rysunku 3 – na zmianach dziennych, nie byłoby zasadnym założeniem. Histogramy wskazują na efekt skupiania się danych wokół średniej. W analizowanym okresie

Charakterystyka	R_S stopa zwrotu spot	R_F stopa zwrotu futures
Średnia	0,000078	0,000090
Mediana	0,000000	0,000000
Minimum	-0,092166	-0,088849
Maksimum	0,166869	0,162727
Odchylenie standardowe	0,015728	0,014462
Skośność	0,433865	0,277220
Kurtoza	12,824430	13,484640

Tab. 3. Podstawowe charakterystyki dziennych stóp zwrotu. Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników Eviews.



— R_S

— R_F

Rys. 3. Wykresy prezentujące charakterystyki rozkładu dziennych stóp zwrotu z kontraktów spot i futures. Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników Eviews.

4. Estymacja zależności cen spot i futures – model regresji metodą MNK

Najprostszym sposobem wyznaczenia zależności między cenami spot i futures jest estymacja równania liniowego metodą najmniejszych kwadratów (MNK). Przy czym estymacja równania wyjaśniającego poziomy cen spot za pomocą cen futures nie jest możliwa w przypadku niestacjonarności szeregów czasowych z uwagi na niebezpieczeństwo uzyskania regresji pozornej. Stacjonarność na przyrostach pozwala jednak na estymację równania, gdzie zmienną objaśnianą są zmiany cen spot, a zmienną objaśniającą zmiany cen futures:

$$\Delta S_t = \alpha + \beta \cdot \Delta F_t + \varepsilon_t. \quad (1)$$

Podobną funkcję regresji można zbudować dla relacji między stopami zwrotu:

$$r_{-S_t} = \alpha + \beta \cdot r_{-F_t} + \varepsilon_t. \quad (2)$$

Parametr β z powyższych równań to parametr wrażliwości. Jest to jednocześnie współczynnik zabezpieczenia dla kontraktu terminowego w przypadku stosowania transakcji hedgingowych – wyznaczony na podstawie analizy *ex post*, zapewniający najmniejszą wariancję. Z kolei α to systematyczny trend, a ε składnik resztkowy.

W literaturze przedmiotu dyskutowane jest, czy model ten powinien być estymowany na poziomach cen, czy też ich zmianach (bezwzględnych lub procentowych) (Witt, Schroeder i Hayenga 1986). Jednak wielu badaczy wykorzystuje do tego celu zmiany cen. Ten rodzaj analizy, choć jest powszechnie wykorzystywany, nie daje jednak gwarancji, że otrzymane rezultaty są statystycznie istotne.

W wyznaczonym równaniu współczynnik β jest stały i niezmienny ze względu na założenie o stałości macierzy kowariancji w czasie, co jest uznawane za podstawową wadę tej metody estymacji zależności cen spot i futures. Założenie to nie jest bowiem spełnione z powodu występowania zjawiska heteroskedastyczności oraz autokorelacji składnika losowego (Humeńczuk 2003). W efekcie obniżona jest efektywność estymatorów parametrów strukturalnych otrzymanych metodą najmniejszych kwadratów, a wnioskowanie o istotności parametrów obarczone jest ryzykiem.

Wyniki estymacji modelu regresji dla zmian cen spot i futures na mrożony koncentrat pomarańczowy oraz procentowych zmian tych cen (z uwagi na wspomniany wcześniej brak jednorodności w badaniach) przedstawiono w tabeli 4.

$\Delta S_t = \alpha + \beta \cdot \Delta F_t + \varepsilon_t$			
	Współczynniki	Błąd standardowy	Prawdopodobieństwo
C	-0,002581	0,010489	0,8056
ΔF_t	0,993370	0,006306	0,0000
$R^2 = 0,885057$ Durbin-Watson = 2,142720 F = 24816,90 (p = 0,000)			
$\Delta s_t = \alpha + \beta \cdot \Delta f_t + \varepsilon_t$			
	Współczynniki	Błąd standardowy	Prawdopodobieństwo
C	0,000031	0,000102	0,7604
Δf_t	1,008792	0,007093	0,0000
$R^2 = 0,862551$ Durbin-Watson = 2,129290 F = 20225,64 (p = 0,000)			

Tab. 4. Wyniki estymacji równania regresji metodą MNK dla danych dziennych. Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników Eviews.

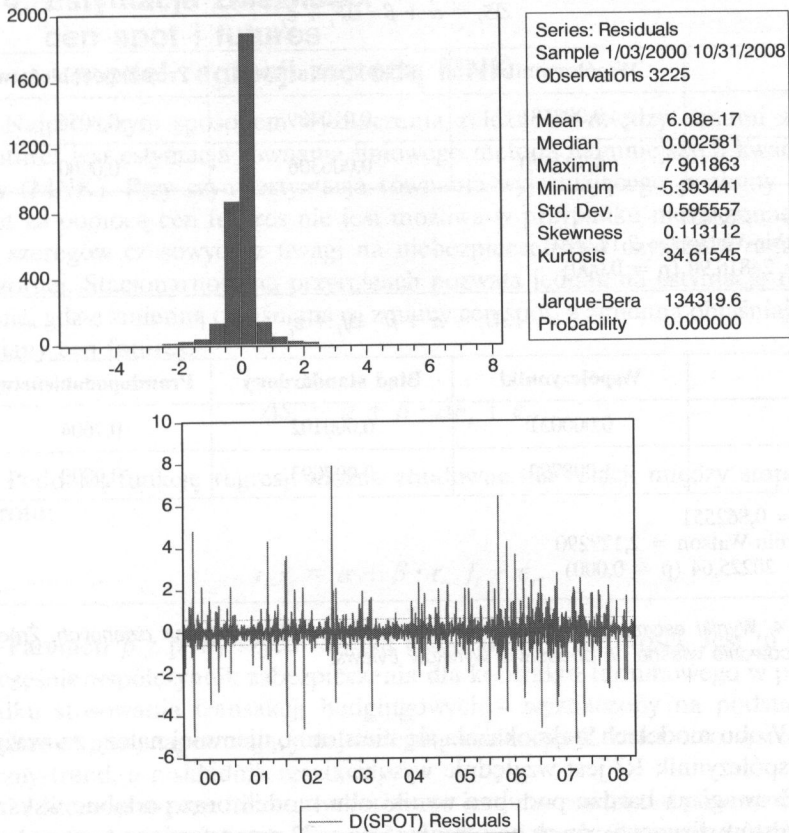
W obu modelach stała okazała się nieistotna, niemniej należy zauważyć, iż współczynnik R^2 jest względnie wysoki.

Z uwagi na bardzo podobne wyniki obu modeli oraz podobne wskazania testów diagnostycznych na rysunku 5 na s. 72 przedstawiono testy wyłącznie dla pierwszego z nich.

Rozkład reszt ze stworzonego modelu ma charakter leptokurtyczny, a ponadto widoczne są okresy, gdzie miało miejsce bardzo dobre dopasowanie danych teoretycznych do empirycznych oraz okresu o dużej zmienności reszt.

Przeprowadzone testy jednoznacznie wskazują na występowanie:

- autokorelacji – wskazanie testu Breuscha-Godfrey'a, zwanego testem mnożników Lagrange'a, $F = 9,724$ ($p = 0,000$) oznacza konieczność odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji składnika resztowego w stworzonym modelu;
- zmienności wariancji – test na występowanie efektu ARCH dał statystykę $F = 67,116$ ($p = 0,000$), co wskazuje iż wariancja nie ma charakteru czysto losowego;
- heteroskedastyczności – wyniki testu White'a (*White Heteroskedasticity Test*) $F = 10,098$ ($p = 0,000$) wskazują na konieczność odrzucenia hipotezy zerowej, że reszty w modelu mają stałą wariancję.



Rys. 5. Rozkład reszt z modelu MNK $\Delta S_t = \alpha + \beta \cdot \Delta F_t + \varepsilon_t$. Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników Eviews.

5. Estymacja zależności cen spot i futures – model ARIMAX

Inna metoda wyznaczenie współczynnika zabezpieczenia to estymacja modelu opisującego stacjonarny proces stochastyczny z dodatkowymi zmiennymi objaśniającymi, czyli np. uwzględnienie w modelu opóźnionych cen spot i futures. Modele ARIMA (p, d, q) łączą idee średniej ruchomej i autoregresji. Jest to przykład modelu dynamicznego, służącego do modelowania procesów, gdzie reakcja zmiennej zależnej na błędy losowe lub zmiany zmiennych niezależnych jest rozciągnięta w czasie. Model można wyrazić wzorem:

$$\Delta S_t = \alpha + \beta \Delta F_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta S_{t-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (3)$$

Do identyfikacji liczby opóźnień w modelu wykorzystywane są: przebieg funkcji autokorelacji (ACF) i funkcji autokorelacji cząstkowej (PACF) oraz kryteria informacyjne AIC (*Akaike Information Criterion*) i BIC (*Bayesian Information Criterion*). Funkcja ACF umożliwia identyfikację procesu generującego obserwacje zmiennej zależnej, a zwłaszcza pozwala określić, czy szereg czasowy jest generowany przez proces białego szumu. Funkcja ACF, zwana korelogramem, powinna mieć współczynniki nieistotne. Funkcja PACF stanowi rozwinięcie funkcji autokorelacji, w którym została usunięta zależność od elementów pośrednich.

Przy estymacji równania ARIMA na danych dziennych oceny parametrów powinny być istotne statystycznie, ale R^2 z reguły jest niewielkie, gdyż model taki cechuje się bardzo wysokim stopniem zmienności. Wyestymowany model ARIMA zawiera nieistotne zmienne, dlatego też prezentacja jego wyników została pominięta.

6. Estymacja zależności cen spot i futures – model ECM

Przedstawione modele bazują jedynie na krótkookresowych zmianach, gdyż w wyniku różnicowania zmiennych (w celu uzyskania stacjonarnego procesu) utracona została informacja o zależności długookresowej między tymi szeregami, która zgodnie z teorią powinna mieć miejsce i może zostać włączona do modelu.

Koncepcja kointegracji wprowadzona przez R. Engle'a i C. Grangera zakłada, że jeżeli zmienne mają taki sam rząd integracji oraz istnieje kombinacja liniowa tych procesów, z której reszty są niestacjonarne, to zmienne są skointegrowane i możliwa jest estymacja modelu korekty błędów ECM (Engle i Granger 1987).

Model ECM (*Error Correction Model*), wyrażający zależność między krótkookresowymi zmianami cen spot i futures, a jednocześnie istnienie relacji długookresowej, można zapisać następująco:

$$\Delta S_t = \alpha + \beta \cdot \Delta F_t = \Theta(z_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad (4)$$

gdzie z_t to reszty z długookresowej relacji między S_t i F_t , czyli:

$$z_t = S_t - b_0 - b_1 \cdot F_t.$$

Równanie to opisuje długookresową ścieżkę równowagi dla analizowanych procesów.

W powyższym modelu ECM możliwe jest dodatkowo uwzględnienie opóźnionych różnic cen spot i futures, czyli równanie to może przyjąć postać:

$$\Delta S_t = \alpha + \beta \cdot \Delta F_t + \Theta(z_{t-1}) + \sum_{i=1}^p \varphi_i \Delta S_{t-i} + \sum_{i=1}^q \delta_i \Delta F_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (5)$$

przy czym dobór optymalnej liczby opóźnień ΔS_t i ΔF_t , czyli p i q następuje na podstawie kryteriów informacyjnych np. AIC.

Pierwszym etapem estymacji modelu ECM jest testowanie istnienia wektora kointegrującego. Szeregi są niestacjonarne na poziomach i stacjonarne na pierwszych różnicach, a reszty z modelu wyrażającego długookresową zależność $S_t = \alpha + \beta \cdot F_t + \varepsilon_t$ są stacjonarne na poziomach (wartości testów wynoszą ADF = -7,681822 ($p = 0,0000$); PP = -8,372445 ($p = 0,0000$); KPSS = 0,801966). Ponadto przeprowadzono test kointegracji Johansena (*trace test, maximum eigenvalue*), który potwierdza istnienie zależności długookresowej między tymi szeregami.

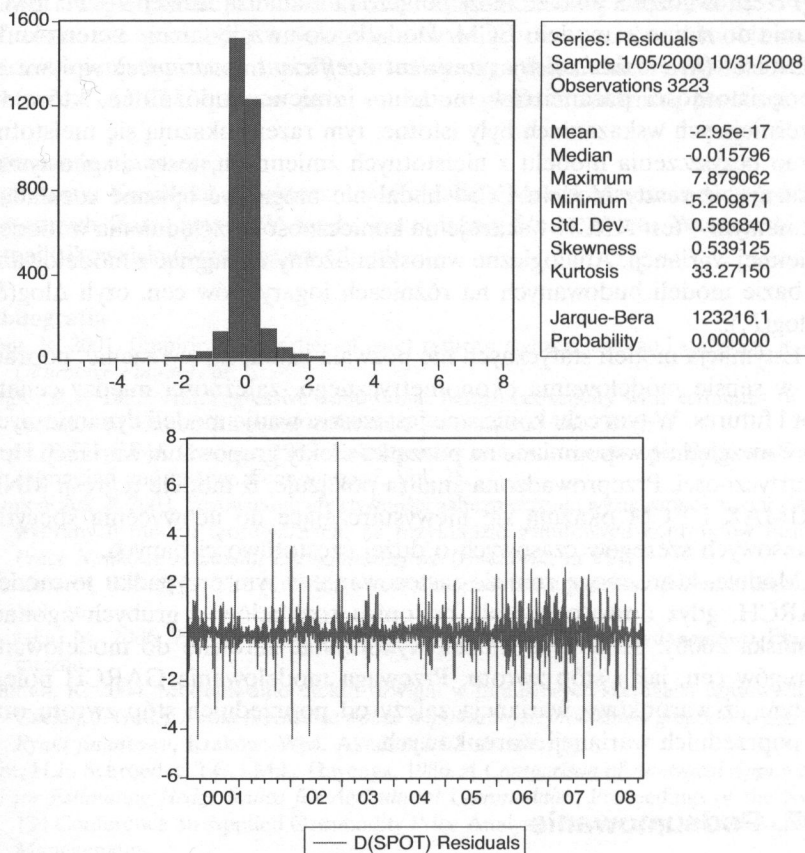
Stworzymy model ECM dla szeregów FCOJ oparty na procesach stacjonarnych, tj. na przyrostach zmiennych i resztach z relacji długookresowej. Wyniki estymacji przedstawiono w tabeli 5.

	Współczynniki	Błąd standardowy	Prawdopodobieństwo
C	-0,003552	0,015755	0,8216
ΔF_t	1,002565	0,007950	0,0000
z_{t-1}	-0,058942	0,007863	0,0000
ΔS_{t-1}	-0,119757	0,020846	0,0000
ΔF_{t-1}	0,115984	0,022328	0,0000
ΔS_{t-2}	-0,061116	0,020691	0,0032
ΔF_{t-1}	0,060714	0,022179	0,0062
ΔS_{t-3}	-0,015366	0,007421	0,0385
$R^2 = 0,885057$ Durbin-Watson = 2,142720 F = 24816,90 ($p=0,000$)			

Tab. 5. Wynik estymacji modelu ECM (na zmianach poziomów cen). Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników Eviews.

Wszystkie zmienne wykorzystane w modelu, z wyjątkiem stałej, są statystycznie istotne na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Współczynnik przy mechanizmie korekty błędem zgodnie z oczekiwaniami jest ujemny, co zapewnia dochodzenie do poziomu równowagi. Niestety rozkład reszt odbiega od rozkładu normalnego, a opisane na rysunku 6 testy sprawdzające poprawność modelu także nie dają zadowalających wyników.

Ocena normalności składnika resztowego w modelu poprzez wykorzystanie testu Jarque-Bera JB = 123 216,1 ($p = 0,000$) wskazuje na koniecz-



Rys. 6. Rozkład reszt z modelu ECM. Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników Eviews.

ność odrzucenia hipotezy zerowej, zakładającej normalność składnika losowego. Wyniki pozostałych testów przedstawiały się następująco:

- statystyka testu Breusch-Godfrey $F = 0,587$ ($p = 0,587$) nie daje podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji składnika resztowego;
- test ARCH $F = 58,897$ ($p = 0,000$) wskazuje na konieczność odrzucenia hipotezy zerowej o niewystępowaniu efektu ARCH, czyli występuje autoregresyjna zmienność wariancji warunkowej, co oznacza konieczność estymacji parametrów modelu za pomocą innej metody;
- test heteroskedastyczności White'a $F = 13,983$ ($p = 0,000$) wskazuje, że wariancja składnika losowego w stworzonym modelu nie jest stała w czasie, czyli ma miejsce heteroskedastyczność, która przekłada się na obciążoność estymatorów wyznaczonych metodą MNK.

Przeprowadzona analiza reszt połączona z analizą funkcji ACF i PACF skłania do zmian w modelu ECM. Dodatkowo uwzględnienie heteroskedastyczności (*heteroskedasticity consistent coefficient covariance*) wpływa na ocenę istotności parametrów modelu – zmienne opóźnione, które we wcześniejszych wskazaniach były istotne, tym razem okazują się nieistotne. Mimo oczyszczenia modelu z nieistotnych zmiennych, testy diagnostyczne wskazują, iż reszty modelu ECM nadal nie mogą być opisane rozkładem normalnym – test ARCH wskazuje na konieczność uwzględnienia w modelu zmiennej wariancji. Analogiczne wnioski możemy wyciągnąć z modelowania na bazie modeli budowanych na różnicach logarytmów cen, czyli $\Delta \log(S_t)$ i $\Delta \log(F_t)$.

Estymacja modeli statycznych nie pozwala zatem na wyrażenie, poprawnej w sensie modelowania ekonometrycznego, zależności między cenami spot i futures. W tym celu konieczne jest zastosowanie modeli dynamicznych, które uwzględnią wspomniane na początku efekty grupowania wariancji i leptokurtyczności. Przeprowadzona analiza pokazuje, iż modele regresji MNK, ARIMAX i ECM okazują się niewystarczające do uchwycenia specyfiki finansowych szeregów czasowych o dużej częstotliwości danych.

Modele, które mogą znaleźć zastosowanie w tym przypadku to modele GARCH, gdyż dostosowują się do opisu rozkładów o grubych ogonach (Osińska 2006). Modele te można wykorzystać zarówno do modelowania szeregów cen, jak i stóp zwrotu. Przewaga modelowania GARCH polega na tym, iż warunkowa wariancja zależy od poprzednich stóp zwrotu oraz od poprzednich wariancji warunkowych.

7. Podsumowanie

Finansowe szeregi czasowe wymagają szczególnego podejścia w procesie estymacji, gdyż ani zmiany cen, ani stopy zwrotu nie mają rozkładu normalnego. Podstawowe cechy charakterystyczne tych szeregów to występowanie leptokurtyczności i grubych ogonów rozkładu. Ponadto analiza dynamiki procesu wskazuje na zmienność zróżnicowania w czasie i skupianie się okresów o dużym zróżnicowaniu. W przypadku dużej częstotliwości danych występuje też efekt autokorelacji, co może świadczyć o słabej efektywności rynku.

Badanie właściwości finansowych szeregów czasowych było oparte na szeregach cen spot i futures kontraktów na FCOJ (*frozen concentrated orange juice*) oraz ich stóp zwrotu, jednak podobnych wyników należy oczekiwać przy analizie szeregów cen innych towarów rolnych notowanych na światowych giełdach towarowych. Zmienność cen i problem z modelowaniem tych szeregów związany jest bowiem z różnorodnością czynników na nie wpływających.

Podjęte próby estymacji modeli statycznych okazały się niewystarczające do uzyskania modelu, który przeszedłby pozytywnie testy diagnostyczne.

Nawet uwzględnienie w modelu relacji długookresowej między cenami spot i futures nie pozwoliło uzyskać zadowalających wyników. Modelowanie zależności między cenami spot i futures wymaga skorzystania z modelu o charakterze GARCH, który w pełni może uwzględnić dynamikę procesu.

Informacje o autorce

Mgr Iwona Kowalska – doktorant w Zakładzie Metod Matematycznych i Statystycznych Zarządzania Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Warszawskiego.
E-mail: ikowalska@mail.wz.uw.edu.pl.

Bibliografia

- Cont, R. 2001. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, nr 1.
- Engle, R.F. 1982. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, Vol. 50, nr 4.
- Engle, R.F. i C.W.J. Granger. 1987. Cointegration and error correction: Representation, estimation and testing. *Econometrica*, Vol. 35.
- Humeńczuk, P. 2003. Porównanie efektywności zabezpieczenia wyznaczonej na podstawie wybranych modeli teoretycznych, na przykładzie walutowych kontraktów futures. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, nr 991.
- Mandelbrot, B.B. 1963. The variation of certain speculative process. *Journal of Business*, Vol. 36.
- Osińska, M. 2006. *Ekonometria finansowa*, Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
- Piontek, K. 2004. Modelowanie efektu dźwigni w finansowych szeregach czasowych, w: Czekaj, J. (red.), *Nauki finansowe wobec współczesnych problemów gospodarki polskiej. Rynki finansowe*, Kraków: Wyd. Akademii Ekonomicznej.
- Witt, H.J., Schroeder, T.C. i M.L. Hayenga. 1986. *A Comparison of Analytical Approaches for Estimating Hedge Ratios for Agricultural Commodities*, Proceedings of the NCR-134 Conference on Applied Commodity Price Analysis, Forecasting and Market Risk Management.