

Szacowanie ryzyka zmian cen akcji metodą podziału pola

Grzegorz Przekota

W pracy podjęto problem szacowania ryzyka zmian cen akcji. Najbardziej popularne są miary klasyczne: wariancja, odchylenie standardowe oraz współczynnik zmienności. Wśród miar nieklasycznych najbardziej popularny jest wymiar fraktalny, w tym wykładnik Hursta. W pracy zaproponowano alternatywny sposób liczenia wymiaru fraktalnego szeregów czasowych. Określa on, jak silnie szereg czasowy wypełnia swoją przestrzeń, i służy między innymi do charakteryzowania szeregów danych giełdowych ze względu na stopień „postrzępienia”. Wymiar fraktalny obliczono dla szeregów czasowych notowań indeksów giełdowych WIG i WIG20 w latach 2008–2011. Otrzymane wyniki łatwo można interpretować oraz odnieść je do prezentacji graficznej szeregu, co jest ważne w praktycznych zastosowaniach.

1. Wstęp

W klasycznej teorii analizy ryzyka cen akcji stosuje się popularne narzędzia statystyczne: wariancję, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności czy semiodchylenie standardowe (Jajuga i Jajuga 2006: 182–187). Praktyczna skuteczność tych miar jest bezdyskusyjna, chociaż warto zwrócić uwagę na fakt, iż dla cen akcji najwłaściwszą z wymienianych miar będzie współczynnik zmienności, gdyż wartość odchylenia standardowego zależy od poziomu cen, natomiast dla szeregów stóp zwrotu najwłaściwszą miarą będzie odchylenie standardowe.

Warto jednak poszukiwać także innych rozwiązań. Mniej popularne są narzędzia teorii chaosu. Narzędzia pochodzące z teorii chaosu nie są jeszcze powszechnie stosowane wśród badaczy, głównie ze względu na trudności powstające przy obliczeniach oraz częste niejasności interpretacyjne. Niniejsza praca ma na celu przedstawienie jednego z narzędzi teorii chaosu – wymiaru fraktalnego. Jedną z najpopularniejszych metod szacowania wymiaru fraktalnego jest metoda wariacyjna VM (Dubuc i in. 1989: 1506). Jej rozwinięciem jest metoda segmentowe-wariacyjna SVM zaproponowana przez Zwolankowską (2001: 63). W pracy zaprezentowano autorską metodę szacowania wymiaru fraktalnego metodą podziału pola.

2. Wymiar fraktalny szeregów czasowych

Geometria euklidesowa podaje wymiar przestrzeni, w której umieszczony jest szereg czasowy. Przestrzenią tą jest płaszczyzna o wymiarze euklidesowym – 2. Rozpatrując natomiast trajektorię szeregu czasowego jako łamaną, otrzymujemy wymiar euklidesowy – 1. Odchodząc od wymiaru euklidesowego, można zauważyć, że wykres szeregu czasowego nie wypełnia całej płaszczyzny, na której został umieszczony, zatem jego wymiar będzie mniejszy od 2 i różny od 1, gdyż jest to wymiar euklidesowy prostej, a szeregi czasowe nie mają na ogół kształtu linii prostej.

Rozwiązaniem tej niedogodności jest wymiar fraktalny, scharakteryzowany przez Petersa: „Wymiar fraktalny, który opisuje, w jaki sposób obiekt (lub szereg czasowy) wypełnia swoją przestrzeń, jest wynikiem wszystkich czynników wpływających na system, którego wytworem jest dany obiekt (szereg czasowy)” (Peters 1997: 58).

Wymiar fraktalny oznacza się przez D i nie musi on być liczbą całkowitą. Dla wykresów szeregów czasowych przyjmuje wartości z przedziału $<1; 2>$. Wartość 1 wymiar szeregu czasowego przyjmować będzie wówczas, gdy wykres będzie miał kształt linii prostej, a wartość 2, gdy będzie wypełniał pewien obszar dwuwymiarowy na płaszczyźnie. W praktyce wartości skrajne nie są osiąmane.

Skoro wymiar fraktalny ma opisywać, jak szereg czasowy wypełnia obszar, innymi słowy, jak zagęszcza się na płaszczyźnie, to większe zagęszczenie powodować będzie zwiększony wymiar fraktalny, a mniejsze zagęszczenie spowoduje mniejszy wymiar fraktalny. Dla szeregów czasowych oznacza to, że częste zmiany w różnych kierunkach będą powodować zwiększenie wymiaru i szereg będzie bardziej wypełniał płaszczyznę, a szeregi jednokierunkowe, z małą liczbą zmian, będą miały mniejsze wymiary fraktalne, ich kształty zaś będą bardziej zbliżone do kształtu prostej. Szeregi, w których występują częste zmiany w różnych kierunkach, charakteryzuje zjawisko powrotu do średniej, a szeregi o małej liczbie zmian – zjawisko podtrzymania trendu. Odpowiednie wnioski można jednak wysnuć dopiero po obserwacji danych empirycznych.

Przykład zastosowania wymiaru fraktalnego do zjawisk naturalnych podaje Mandelbrot (1983). Problem dotyczy pomiaru długości linii brzegowej. Wynik zależy od długości miarki: im miarka jest krótsza, tym wynik dokładniejszy, gdyż pozwala uchwycić więcej krzywizn. Wymiar fraktalny umożliwia odpowiedź na pytanie, jak postrzępione są linie brzegowe. Im linie brzegowe są bardziej postrzępione, tym ich wymiar fraktalny jest większy. E. Peters podaje np. wymiar fraktalny linii brzegowej Norwegii – 1,52 i linii brzegowej Wielkiej Brytanii – 1,26 (Peters 1997: 60). Wynik ten jest zgodny z obserwacją mapy – linia brzegowa Norwegii jest bardziej postrzępiona od linii brzegowej Wielkiej Brytanii, a więc jej wymiar fraktalny jest większy i bardziej zbliżony do 2.

3. Geometryczny sposób wyznaczenia wymiaru fraktalnego

Jeden ze sposobów znalezienia wymiaru fraktalnego szeregów czasowych podaje E. Peters (1997). Wymiar fraktalny ustala się, mierząc stopień postrzępienia linii. Należy policzyć liczbę kół o określonej średnicy, które potrzebne są do pokrycia całej linii. Następnie trzeba zmniejszyć ustaloną średnicę kół i powtórzyć obliczenia. Po przeprowadzeniu odpowiedniej liczby takich operacji można zauważyć, że liczba kół jest związana wykładniczo z długością promienia kół następującą relacją:

$$N_r = (2r)^D, \quad (1)$$

gdzie:

N_r – najmniejsza liczba kół przy ustalonym r ,

r – promień,

D – wymiar fraktalny.

Stąd wymiar fraktalny D jest współczynnikiem kierunkowym prostej regresji:

$$\log N_r = D \log(2r). \quad (2)$$

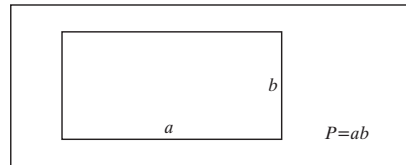
Jest to jednak mało efektywny sposób wyliczenia wymiaru fraktalnego, gdyż wymaga wielu geometrycznych konstrukcji. Podobnie liczy się wymiar fraktalny metodą pudełkową BCM, z tym że zamiast kół zlicza się kwadraty o określonej długości boku potrzebne do pokrycia wykresu szeregu czasowego.

4. Szacowanie ryzyka metodą podziału pola

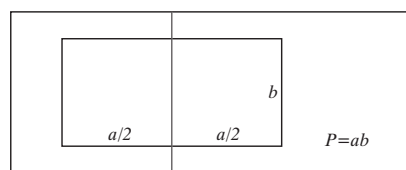
Autorska metoda szacowania wymiaru fraktalnego przedstawiona w niniejszym opracowaniu łączy elementy metod segmentowo-wariacyjnej oraz tradycyjnych metod geometrycznych. Podobnie jak w metodzie segmentowo-wariacyjnej wykres szeregu czasowego pokrywany będzie przez prostokąty, samo szacowanie wymiaru fraktalnego będzie natomiast odbywać się poprzez szacowanie współczynnika regresji, podobnie jak w metodach geometrycznych.

Należy założyć, że ma się do dyspozycji kawałek płaszczyzny w kształcie prostokąta o podstawie a i wysokości b . Pole tego prostokąta będzie wynosić $P = ab$ (rysunek 1). Prostokąt ten zostanie podzielony na połowy, dlatego też pole P nazwiemy pierwotnym (przed podziałem). Następnie dzieli się pierwotny prostokąt na dwie równe części pionową prostą (rysunek 2). Łączne pole powstałych dwóch prostokątów będzie wynosić p i $p = P$, ponieważ:

$$\frac{a}{2} \cdot b + \frac{a}{2} \cdot b = \frac{2ab}{2} = ab = P. \quad (3)$$



Rys. 1. Prostokąt o polu P . Źródło: opracowanie własne.

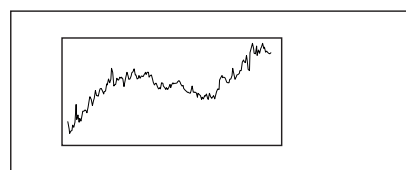


Rys. 2. Prostokąt o polu P po podziale. Źródło: opracowanie własne.

Kolejne przepoławianie prostokątów nie zmieni faktu, że suma pól zawsze będzie wynosić P . Oznacza to, że suma pól P po podziale prostokąta na dowolną liczbę równych prostokątów pionowymi liniami będzie taka sama, jak suma pól p po podziale dwukrotnie gęstszym od danego (pierwotnym może być podział np. na trzy prostokąty, a następny na sześć). Zatem dla dowolnego podziału zachodzi tutaj związek:

$$p = 2 \cdot \frac{P}{2}. \quad (4)$$

W prostokącie należy umieścić wykres szeregu czasowego.



Rys. 3. Szereg czasowy na płaszczyźnie. Źródło: opracowanie własne.

Niech szereg czasowy ma długość N , wtedy pole obszaru zajmowanego przez szereg można wyliczyć następująco:

$$P = N \cdot (x_{\max} - x_{\min}), \quad (5)$$

gdzie: x_{\max} i x_{\min} są odpowiednio największą i najmniejszą wartością w szeregu.

Należy podzielić prostokąt, zajmowany przez szereg czasowy, pionową prostą na połowy i znaleźć sumę pól p powstałych połówek, stosując wzór (5) do każdej połówki:

$$p = \frac{N}{2} \cdot (x_{\max_1} - x_{\min_1}) + \frac{N}{2} \cdot (x_{\max_2} - x_{\min_2}). \quad (6)$$

Pomiędzy p a P zachodzi nierówność:

$$p \leq P. \quad (7)$$

Powtarzając czynność przepoławiania skończoną ilość razy, za każdym razem okaże się, że suma pól połówek w stosunku do sumy pól pierwotnych jest od nich nie większa. Oznacza to, że przy dowolnym podziale pierwotnym na k części pole zajmowane przez wykres szeregu będzie wynosić:

$$P_k = \frac{N}{k} \sum_{i=1}^k (x_{\max_i} - x_{\min_i}), \quad (8)$$

a przy podziale na $2k$ części:

$$p_{2k} = \frac{N}{2k} \sum_{i=1}^{2k} (x_{\max_i} - x_{\min_i}). \quad (9)$$

Pomiędzy P_k i p_{2k} zachodzi nierówność:

$$p_{2k} \leq 2 \cdot \frac{P_k}{2}. \quad (10)$$

Równość we wzorze (10) zachodzi jedynie dla wykresów szeregów czasowych całkowicie wypełniających swoją płaszczyznę. Jeżeli szereg będzie miał kształt linii prostej, to pomiędzy p a P zachodzić będzie równość:

$$p_{2k} = 1 \cdot \frac{P_k}{2}. \quad (11)$$

Równość ta zachodzi także dla łamanej począwszy od pewnego podziału. Dla dowolnego szeregu:

$$p_{2k} = D \cdot \frac{P_k}{2}, \quad (12)$$

gdzie: D zawierać się będzie w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$ i będzie tym większe, im kształt trajektorii szeregu czasowego będzie bardziej postrzępiony, czyli im częściej w szeregu występować będzie zmiana trendów na przeciwne. Wartość D natomiast będzie tym bliższa 1, im kształt szeregu bliższy będzie prostej, czyli im mniej będzie w szeregu zmian trendów na przeciwne. Jeśli w układzie współrzędnych na osi x będzie się odkładać wartości $P/2$, a na osi y wartości p , to wartość D będzie współczynnikiem regresji prostej oszacowanej

dla punktów $(P/2; p)$. Tak zdefiniowana wartość D może być traktowana jako miara postrzępienia szeregów, czyli jako wymiar fraktalny szeregów.

W praktycznym zastosowaniu dla danych giełdowych na podstawie wartości wymiaru fraktalnego można wnioskować o ryzyku inwestycyjnym.

Przykład 1. Zakłada się, że szereg o $N=100$ ma następującą postać: 1, 2, 1, 2, 1, 2 itd. Dla całego szeregu $N=100$, $x_{\max}=2$, $x_{\min}=1$, stąd $P=100$. Po przepołowieniu szeregu otrzymuje się dwa szeregi długości 50, w których $x_{\max}=2$, $x_{\min}=1$. Pole każdego jest równe 50, a suma $p=100$. Szeregi długości 50 są z kolei pierwotnymi dla szeregów długości 25, w których $x_{\max}=2$, $x_{\min}=1$, a stąd pole każdego prostokąta jest równe 25, a suma 100. Jest to jeden z możliwych podziałów szeregu długości 100 na połowy. Drugi podział to podział najpierw na szeregi długości 20, potem 10, a następnie 5. W każdym z tych przypadków suma pól równa jest 100. Przeprowadzając oszacowanie wymiaru fraktalnego D , dostajemy wartość 2, co jest równoznaczne z tym, że powyższy szereg zajmuje całą swoją płaszczyznę, a to oznacza także, że mamy do czynienia ze zjawiskiem powrotu do średniej.

N	$N/2$	P	p
100	50	100	100
50	25	100	100
20	10	100	100
10	5	100	100

Tab. 1. Pola zajmowane przez szereg w kolejnych podziałach szeregu z przykładu 1. Źródło: opracowanie własne.

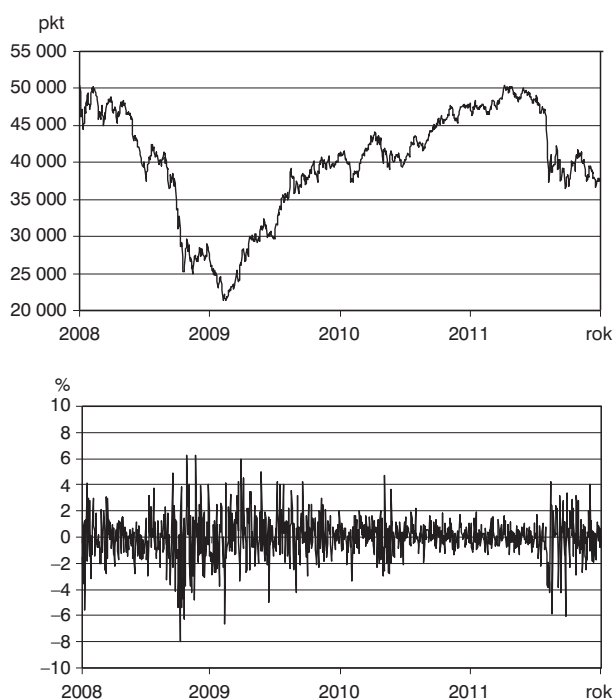
Przykład 2. Zakłada się, że szereg o $N=100$ ma następującą postać: 1, 2, 3, 4 itd. Dla całego szeregu $N=100$, $x_{\max}=100$, $x_{\min}=1$, stąd $P=9900$. Po przepołowieniu szeregu otrzymujemy dwa szeregi długości 50, w pierwszym $x_{\max}=50$, $x_{\min}=1$, w drugim $x_{\max}=100$, $x_{\min}=51$, a stąd pole każdego jest równe 2450, a suma $p=4900$. Szeregi długości 50 są z kolei pierwotnymi dla szeregów długości 25, w których każde pole równe 600, a suma $p=2400$ (przy polu pierwotnym $P=4900$, dla $N=50$). Jest to jeden z możliwych podziałów szeregu długości 100 na połowy. Drugi podział to podział najpierw na szeregi długości 20, potem 10, a następnie 5. Wyniki tych podziałów umieszczono w tabeli 2. Przeprowadzając oszacowanie wymiaru fraktalnego D , otrzymuje się dla takich danych wartość 0,9861, co jest równoznaczne z tym, że wykres szeregu stanowi linię prostą. Oznacza to również zjawisko jednokierunkowego trendu. Gdyby dopuścić wszystkie wartości rzeczywiste leżące na linii prostej, wartość D byłaby równa 1. Wartość 1 oznacza linię prostą i nie jest osiągnięta dla szeregów innego typu.

N	$N/2$	P	p
100	50	9 900	4 900
50	25	4 900	2 400
20	10	1 900	900
10	5	900	400

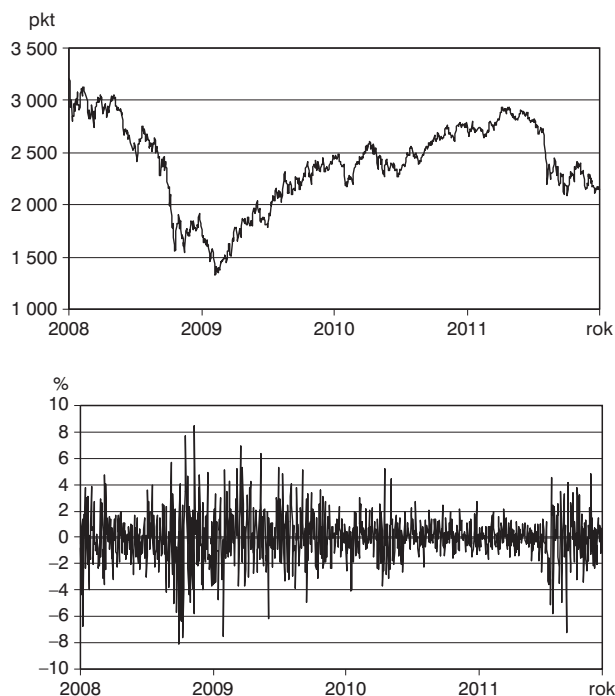
Tab. 2. Pola zajmowane przez szereg w kolejnych podziałach szeregu z przykładu 2. Źródło: opracowanie własne.

5. Wymiar fraktalny dla szeregu cen i stóp zwrotu WIG i WIG20

Praktyczne zastosowanie wymiaru fraktalnego pokazano na przykładzie wartości indeksów giełdowych WIG i WIG20 oraz stóp zwrotu tych indeksów w latach 2008–2011. Na rysunku 4 przedstawiono kształtowanie się wartości indeksu WIG oraz stopy zwrotu tego indeksu w badanym okresie, a na rysunku 5 kształtowanie się wartości indeksu WIG20 oraz stopy zwrotu tego indeksu w tym samym okresie.



Rys. 4. Wartości i stopy zwrotu indeksu WIG w latach 2008–2011. Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW.



Rys. 5. Wartości i stopy zwrotu indeksu WIG20 w latach 2008–2011. Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW.

Obserwacja kształtu szeregu wartości indeksów WIG i WIG20 wskazuje na wyraźne podobieństwa, tj. punkty zwrotne występują w podobnym czasie, trendy mają podobną siłę i długość. Gdyby scharakteryzować te szeregi odchyleniem standardowym (tabela 3), to dla indeksu WIG otrzymano 7361,77, a dla WIG20 409,08. Tak duża różnica jest wynikiem innego poziomu wartości tych indeksów. Pomiar współczynnikiem zmienności wskazuje na wyższą względną zmienność wartości indeksu WIG niż WIG20 – jest to odpowiednio 18,4% i 17,1%. Ryzyko zatem lepiej tutaj przedstawić za pomocą współczynnika zmienności. Dla tych danych wyznaczono także wymiar fraktalny D szacowany metodą podziału pola; wyniósł on odpowiednio 1,4218 oraz 1,4119. Takie wyniki z jednej strony potwierdzają podobieństwo w kształtowaniu się wartości indeksów WIG i WIG20, ale dodatkowo, znając zakres wymiaru fraktalnego $\langle 1; 2 \rangle$, można powiedzieć, iż mamy tutaj do czynienia z przeciętnie silnym zjawiskiem podtrzymania trendu.

W tabeli 4 zaprezentowano charakterystyki dla szeregu czasowego stóp zwrotu indeksów WIG i WIG20. Dla indeksu WIG otrzymano odchylenie standardowe na poziomie 1,5991%, dla indeksu WIG20 1,9082%. Wynika stąd, iż ryzyko zmiany wartości stopy zwrotu indeksu WIG20 jest znacząco

wyższe niż dla indeksu WIG, tymczasem obserwacja kształtu szeregów stóp zwrotu wskazuje na dość duże podobieństwo. Wynik z wymiaru fraktalnego to odpowiednio 1,6998 oraz 1,7088 i tutaj mamy informację o wyraźnym podobieństwie tych szeregów. Jednocześnie wartości wymiaru fraktalnego wskazują, iż w szeregach stóp zwrotu występuje silne zjawisko oscylacji wokół poziomu średniego.

Statystyka	WIG	WIG20
Średnia	39 913,83	2 389,02
Odchylenie standardowe	7 361,77	409,08
Współczynnik zmienności	18,4%	17,1%
Wymiar fraktalny	1,4218	1,4119

Tab. 3. Charakterystyki dla szeregu wartości indeksów WIG i WIG20. Źródło: obliczenia własne.

Statystyka	WIG	WIG20
Średnia	-0,0165%	-0,0221%
Odchylenie standardowe	1,5991%	1,9082%
Współczynnik zmienności	-	-
Wymiar fraktalny	1,6998	1,7088

Tab. 4. Charakterystyki dla szeregu stóp zwrotu indeksów WIG i WIG20. Źródło: obliczenia własne.

6. Podsumowanie

Analiza zaprezentowanych przykładów dostarcza bardzo ciekawych informacji. Można zauważyć kilka prawidłowości. Szeregi bardziej postrzępione mają wyższe wymiary fraktalne od szeregów mniej postrzępionych. Szeregi o przeważającym trendzie bocznym mają wyższe wymiary fraktalne od szeregów o wyraźnym trendzie wzrostowym lub spadkowym. Oczywiście te dwie informacje przenikają się wzajemnie, gdyż na odcinku o tej samej długości szereg o trendzie bocznym najczęściej jest bardziej postrzępiony od szeregu o wyraźnym trendzie, a to ze względu na częstszą liczbę zmian w różnych kierunkach. Szereg taki bardziej upodabnia się do szeregu rozpatrywanego w przykładzie 1, a więc szeregu wypełniającego bardziej zajmowany obszar, a co z tym idzie do szeregu, w którym występuje zjawisko powrotu do średniej. Szeregi o wyraźnym trendzie wzrostowym lub spadkowym upodabniają się natomiast bardziej do prostej analizowanej w przykładzie 2, dlatego ich wymiary fraktalne są mniejsze. Oczywiście siła takiego trendu może być różna.

W praktyce wymiar fraktalny może być traktowany jako miara ryzyka inwestycyjnego. Jeśli ryzyko zdefiniujemy jako zmienność i przyjmiemy, że

większa zmienność oznacza większe ryzyko, to niższe wartości wymiaru fraktalnego będą oznaczać niższe ryzyko, a wyższe wartości wymiaru fraktalnego wyższe ryzyko. Warto także zwrócić uwagę na fakt, iż miara ta może być z powodzeniem stosowana zarówno dla szeregów cen, jak i stóp zwrotu. Oczywiście nie ma sensu porównywanie wymiaru fraktalnego szeregu cen i szeregu stóp zwrotu, bo wiadomo, że ten drugi w praktyce zawsze będzie miał większy wymiar. Porównywać należy ten sam typ szeregu (albo cen albo stóp zwrotu) dla różnych papierów wartościowych. Jedną z najważniejszych zalet wymiaru fraktalnego jest jego prosta interpretacja graficzna, co może być z powodzeniem wykorzystane nawet przez mniej doświadczonych inwestorów.

Informacje o autorze

Dr Grzegorz Przekota – Instytut Ekonomii i Zarządzania, Politechnika Koszalińska. E-mail: grzegorzprzekota@wp.pl.

Bibliografia

- Dubuc, B., Roques-Carnes, J.F., Tricot, C. i S.W. Zucker 1989. Evolving the Fractal Dimension of Profiles. *Physical Review*, nr 39.
- Jajuga, K. i T. Jajuga 2006. *Inwestycje*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Mandelbrot, B. 1983. The Fractal Geometry of Nature. *American Journal of Physics*, nr 3 (51), DOI: 10.1119/1.13295.
- Peters, E.E. 1997. *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, Warszawa: WIG-Press.
- Zwolankowska, M. 2001. Fraktalna geometria polskiego rynku akcji. *Rozprawy i Studia*, t. 382, Uniwersytet Szczeciński.