

## Zastosowanie modeli zdarzeń konkurujących do badania ryzyka kredytowego

Nadesłany: 31.07.16 | Zaakceptowany do druku: 29.01.17

**Ewa Wycinka\***

Ryzyko kredytowe wynika z możliwości niedotrzymania warunków umowy przez kredytobiorcę i polega na nieotrzymaniu przez bank w ustalonym terminie płatności określonej warunkami kredytu. Ryzyko kredytowe najczęściej jest utożsamiane z wystąpieniem niewypłacalności kredytobiorcy. Jak zauważają Hu i Cheng (2015), w literaturze przedmiotu do tej pory zbyt mało uwagi poświęcono zdarzeniom konkurującym z ryzykiem niewypłacalności i ich potencjalnemu wpływowi na oszacowanie prawdopodobieństwa niewypłacalności. W artykule niewypłacalność kredytobiorcy i wcześniejsza spłata są traktowane jako zdarzenia konkurujące. Do badania natężenia zdarzeń konkurujących zastosowano dwa podejścia – oszacowanie intensywności zdarzenia typu *c* (*cause-specific hazard*) oraz metodę intensywności subrozkładu (*subdistribution hazard*). Omówiono zasady interpretacji wyników w przypadku stosowania każdego z podejść w modelowaniu ryzyka kredytowego. Dla każdego z podejść zbudowano odpowiednie modele regresyjne, przeprowadzono analizę wrażliwości i porównano uzyskane wyniki. Badanie empiryczne przeprowadzono na podstawie próby 5 tys. 60-miesięcznych kredytów udzielonych przez jedną z instytucji kredytowych w Polsce. Do budowy modeli regresyjnych ryzyka niewypłacalności wykorzystano dane aplikacyjne kredytobiorców.

**Słowa kluczowe:** modele Fine-Graya, analiza wrażliwości modeli Coxa, prawdopodobieństwo niewypłacalności, przedwczesna spłata kredytu.

## Application of Competing Risks Models to Credit Risk Assessment

Submitted: 31.07.16 | Accepted: 29.01.17

Credit risk arises from the debtor's possible failure to meet the terms and conditions of the credit contract. As a result, the bank does not receive a particular payment stipulated by the contractual provisions. Credit risk usually equates with the credit taker's insolvency. Hu and Cheng (2015) note the shortage of studies devoted to other kinds of credit risks competing with the risk of default and their influence on the evaluation of the probability of default. In the article, a default and an early repayment are considered to be competing risks. Two approaches were used to research the intensity of competing risks: evaluation of cause-specific hazard and sub-distribution hazard respectively. The interpretation principles within the results acquired by the use of either method have been discussed. For either of the approaches, proper regression models have been set up, alongside conducting the sensitivity analysis. The results have been duly compared. The empirical study employed a sample of 5000 sixty-months' credits granted by one of the Polish financial institutions. Application characteristics of the credit takers have been used in regression models as covariates.

**Keywords:** Fine-Gray models, sensitivity analysis of Cox models, probability of default, early repayments.

**JEL:** C14, C24, C34, G21

---

\* **Ewa Wycinka** – dr, Uniwersytet Gdański, Katedra Statystyki.

Adres do korespondencji: Uniwersytet Gdański, Katedra Statystyki, ul. Armii Krajowej 101, 81-824 Sopot;  
e-mail: ewa.wycinka@ug.edu.pl.

## 1. Wprowadzenie

Ryzyko kredytowe wynika z możliwości niedotrzymania warunków umowy przez kredytobiorcę i polega na nieotrzymaniu przez bank w ustalonym terminie płatności określonej warunkami kredytu (Jajuga, 2004). Dla większości banków stanowi ono największe źródło ryzyka (Gwizdała, 2011). Pierwsze modele ryzyka kredytowego powstały już w latach 40. dwudziestego wieku (Thomas, 2000). Dynamiczny rozwój badań naukowych w tym zakresie nastąpił w latach 90. m.in. za sprawą nowych technologii i dzięki rozwojowi baz danych. Od początku bieżącego stulecia dużą uwagę badaczy skupiają modele przeżycia (historii zdarzeń), które wnoszą do modelowania ryzyka kredytowego drugi wymiar. Modelowany jest nie tylko fakt realizacji ryzyka kredytowego, ale również czas, w którym się ono zrealizuje. Narain (1992), a następnie Banasik, Crook i Thomas (1999) zaproponowali wykorzystanie modeli proporcjonalnego hazardu Coxa do badania ryzyka niewypłacalności kredytobiorcy. Jest to metoda analizy przeżycia najczęściej wykorzystywana do badania ryzyka kredytowego w ostatniej dekadzie (Tong, Mues i Thomas, 2012). Modele Coxa zastosowali m.in. Stepanova i Thomas (2002), którzy modelowali rozkład niewypłacalności i rozkład wcześniejszej spłaty, Andreeva (2006), która z wykorzystaniem modeli Coxa zbudowała modele generyczne dla rynku europejskiego, czy Bellotti i Crook (2007), którzy wprowadzili do modelu zmienne makroekonomiczne.

Ryzyko kredytowe jest najczęściej utożsamiane z wystąpieniem niewypłacalności kredytobiorcy. Niedotrzymanie warunków umowy kredytowej może jednak wynikać z innych przyczyn, takich jak: wcześniejsza spłata kredytu, zmiana warunków umowy (np. przewalutowanie kredytu), śmierć kredytobiorcy itp. Wszystkie te zdarzenia powodują zaburzenie planów finansowych kredytodawcy i mogą mieć negatywny wpływ na jego finanse (por. Meluch, 2004). Jak zauważają Hu i Cheng (2015), w literaturze przedmiotu do tej pory zbyt mało uwagi poświęcono zdarzeniom konkurującym z ryzykiem niewypłacalności i ich potencjalnemu wpływowi na oszacowanie prawdopodobieństwa niewypłacalności. Brakuje zarówno prac, które przedstawiałyby wyniki badań na próbach pobranych z rzeczywistych populacji, jak i wyników badań symulacyjnych (Hu i Cheng, 2015).

Celem niniejszego artykułu jest zbadanie możliwości zastosowania modeli zdarzeń konkurujących do badania ryzyka niewypłacalności i ryzyka wcześniejszej spłaty kredytu. Uwagę poświęcono problemowi niezależności obu tych zdarzeń i konsekwencji niespełnienia tego założenia dla modeli ryzyka kredytowego budowanych z wykorzystaniem analizy przeżycia (analizy historii zdarzeń). Zaproponowano wykorzystanie analizy wrażliwości opartej na przedziałach ufności do oceny potencjalnych konsekwencji niespełnienia założenia niezależności. Według wiedzy autorki jest to pierwsza praca empiryczna prezentująca zastosowanie analizy wrażliwości modeli Coxa oraz modelu Fine-Graya do badania ryzyka kredytowego.

## 2. Modele analizy przeżycia w badaniu niewypłacalności jako jedynego ryzyka kredytowego

W analizie przeżycia badanym zdarzeniem będzie niewypłacalność rozumiana jako określonej długości przeterminowanie spłaty raty. Jeżeli harmonogram spłat rat kredytu zostanie przerwany z innego powodu niż niewypłacalność (np. z powodu całkowitej wcześniejszej spłaty), to mamy do czynienia z obserwacją cenzurowaną.

Niech  $T$  będzie nieujemną zmienną losową wyznaczającą czas trwania kredytu do wystąpienia niewypłacalności. Funkcja trwania  $S(t)$  jest zdefiniowana jako (Jackowska, 2013):

$$S(t) = P(T > t) \quad (1)$$

i jest ona dopełnieniem do jedności dystrybuanty rozkładu:

$$F(t) = 1 - S(t). \quad (2)$$

Funkcja gęstości rozkładu może być wyznaczona jako:

$$f(t) = 1 - \frac{dS(t)}{dt}, \quad (3)$$

natomiast funkcja intensywności (funkcja hazardu) wyrażona wzorem:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t) / \Delta t \quad (4)$$

jest graniczną wartością warunkowego prawdopodobieństwa zdarzenia w przedziale od  $t$  do  $t + \Delta t$ , przy malejącej do zera długości przedziału i pod warunkiem, że dla jednostki nie wystąpiło zdarzenie do momentu  $t$  (Balicki, 2006). Intensywność może być również wyrażona za pomocą wzoru:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}. \quad (5)$$

Zachodzi więc równość:

$$S(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(u) du\right]. \quad (6)$$

Przyjmuje się, że cenzurowanie jest losowe i niezależne od badanego zdarzenia (niewypłacalności)<sup>1</sup>. Niezależność cenzurowania i zdarzenia w przypadku badania ryzyka kredytowego oznacza przyjęcie założenia, że

prawdopodobieństwo niewypłacalności kredytobiorców, którzy dokonali wcześniejszej spłaty, jest takie samo jak kredytobiorców, którzy spłacają kredyt zgodnie z harmonogramem. W dalszej części opracowania założenie to będzie określane w skrócie jako niezależność zdarzeń.

Przy tym założeniu prawdopodobieństwo, że niewypłacalność wystąpi do momentu  $t_m$ , może być oszacowane za pomocą dopełnienia do jedności estymatora Kaplana-Meiera:

$$\widehat{F}(t_m) = 1 - \widehat{S}(t_m) = 1 - \prod_{j=1}^m \frac{n_j - d_j}{n_j}, \quad (7)$$

gdzie:

$n_i$  – liczba czynnych kredytów bezpośrednio przed momentem  $t_j$ ,

$d_j$  – liczba kredytów, w przypadku których wystąpiła niewypłacalność w momencie  $t_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Powyższy estymator wyznaczany jest dla każdego momentu, w którym wystąpiło zdarzenie. Estymator Kaplana-Meiera modeluje prawdopodobieństwo, że niewypłacalność nastąpi po określonym czasie przy założeniu, że jest ono jedynym możliwym zdarzeniem kończącym czas trwania (szerzej: Wycinka, 2015a).

Wpływ poszczególnych charakterystyk związanych z kredytobiorcą oraz udzielonym kredytem na czas do wystąpienia niewypłacalności może być wyrażony za pomocą funkcji regresji wyznaczonej dla funkcji intensywności, zdefiniowanej wzorem (4). Jeżeli głównym celem analizy jest zbadanie wpływu zmiennej lub zmiennych na czas trwania, to odpowiednim modelem jest semiparametryczny model proporcjonalnego hazardu Coxa (Hosmer, Lemeshow i May, 2008):

$$\lambda(t, X) = \lambda_0(t) e^{\sum_{i=1}^k \beta_i X_i} = \lambda_0(t) e^{\beta X^T}, \quad (8)$$

gdzie:

$\lambda_0(t)$  – hazard bazowy,

$X = (X_1, \dots, X_k)$  – wektor zmiennych objaśniających,

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$  – wektor współczynników wyznaczanych metodą największej częściowej wiarygodności.

W modelach proporcjonalnego hazardu Coxa utrzymane jest założenie niezależności cenzurowania i badanego zdarzenia.

Ze wzoru (8) na podstawie zależności (6) można oszacować funkcję trwania w zależności od zmiennych objaśniających (Kleinbaum i Klein, 2012):

$$S(t, X) = [S_0(t)]^{\exp \sum_{i=1}^k \beta_i X_i}. \quad (9)$$

Zmienne objaśniające w modelu Coxa mogą być zarówno ilościowe, jak i jakościowe. Zmienne jakościowe o  $r$  wariantach wprowadza się do modelu zazwyczaj jako zestaw  $r-1$  zmiennych zero-jedynkowych (*dummy variables*). Iloraz funkcji intensywności dla jednostek różniących się tylko wariantem zmiennej  $X_i$  ( $X_i = 1$  względem  $X_i = 0$ ) jest równy  $e^{\beta_i}$  i jest nazywany hazardem względnym (*hazard ratio*). Oznacza on, że w każdym momencie trwania kredytu ryzyko niewypłacalności dla kredytu z cechą  $X_i = 1$  jest  $e^{\beta_i}$  razy większe niż dla kredytu z cechą  $X_i = 0$  (por. Hosmer i in., 2008). Przedział ufności dla hazardu względnego przy współczynniku ufności 95% można wyznaczyć ze wzoru:

$$\exp[\beta_i \pm 1,96 \times Se(\beta_i)], \quad (10)$$

gdzie  $Se(\beta_i)$  jest odchyleniem standardowym dla estymatora parametru w modelu Coxa.

### 3. Modele zdarzeń konkurujących w badaniu dwóch rodzajów ryzyka: niewypłacalności i wcześniejszej spłaty

#### 3.1. Modele ryzyka kredytowego przy założeniu niezależności zdarzeń konkurujących

Wcześniejsze zakończenie spłat kredytu z innych powodów niż niewypłacalność w niektórych portfelach kredytowych występuje z dużym natężeniem i dlatego powinno być uwzględnione w procesie modelowania ryzyka kredytowego. Zdarzenia powodujące wcześniejsze zakończenie spłat mogą być modelowane jako zdarzenia konkurujące z zastosowaniem odpowiednich miar i modeli analizy przeżycia. W dalszej części artykułu jako jedyne zdarzenie konkurujące w stosunku do niewypłacalności będzie uważana całkowita wcześniejsza spłata kredytu. Rozważania można jednak uogólnić na większą liczbę zdarzeń konkurujących.

Przyjmijmy, że spłaty rat kredytu mogą się zakończyć wcześniej z jednej z dwóch niezależnych przyczyn: niewypłacalności i całkowitej spłaty. Analizowane będzie ryzyko niewypłacalności, ale z uwzględnieniem ryzyka całkowitej spłaty.

Niech  $T_c$  będzie czasem trwania do wystąpienia zdarzenia  $c$ . Funkcję intensywności dla zdarzenia  $c$  (*cause-specific hazard function*) można zapisać jako (Kleinbaum i Klein, 2012):

$$\lambda_c(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t \leq T_c < t + \Delta t \mid T_c \geq t) / \Delta t \quad (11)$$

i wyraża ona chwilową intensywność wystąpienia zdarzenia  $c$  w momencie  $t$  pod warunkiem, że jednostka nie doznała zdarzenia  $c$  do momentu  $t$ . Model proporcjonalnego hazardu Coxa dla intensywności zdarzenia  $c$  można zapisać jako:

$$\lambda_c(t, X) = \lambda_{0c}(t) e^{\beta c X^T} \quad (12)$$

oraz

$$S_c(t, X) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_c(u) du\right). \quad (13)$$

Tak zdefiniowany model może być osobno skonstruowany dla każdego ze zdarzeń (ryzyka niewypłacalności i całkowitej spłaty). Pozwala on na oddzielne oszacowanie wpływu predyktorów na każde ze zdarzeń, a także umożliwia wykorzystanie różnych zbiorów zmiennych objaśniających w każdym z modeli. Parametry modelu są interpretowane w taki sam sposób jak w modelach bez zdarzeń konkurujących. Parametry każdego z modeli interpretuje się jako efekty w sytuacji, gdy zdarzenie konkurujące nie istnieje (zostało wyeliminowane) (Pintilie, 2011).

Stepanowa i Thomas (2002) jako pierwsi zwrócili uwagę na konieczność odrębnego modelowania ryzyka niewypłacalności i ryzyka wcześniejszej spłaty, a nawet odrębnej kategoryzacji predyktorów do obu modeli (Stepanowa i Thomas, 2002). Modele Coxa budowane osobno dla ryzyka niewypłacalności i ryzyka wcześniejszej spłaty opierały się więc na założeniu niezależności tych zdarzeń, mimo że autorzy tej kwestii nie poruszyli.

Modyfikacją modelu Coxa dla zdarzeń konkurujących pozwalającą na zbudowanie jednego modelu dla wszystkich zdarzeń, zamiast osobnych modeli dla każdego ze zdarzeń, jest metoda zaproponowana przez Lunna i McNeila (1995) (szerzej: Kleinbaum i Klein, 2012). Model Lunna-McNeila daje takie same oszacowania intensywności jak oddzielne modele Coxa dlatego nie będzie w tym artykule szerzej omawiany.

W modelach Coxa dla zdarzeń konkurujących utrzymane jest wciąż założenie niezależności cenzurowania, które zostało tutaj dodatkowo rozszerzone na zdarzenie konkurujące. Oznacza ono, że prawdopodobieństwo cenzurowania dowolnej jednostki  $i$  w momencie  $t$  nie zależy od prawdopodobieństwa wystąpienia któregośkolwiek zdarzenia w tym momencie (Kleinbaum i Klein, 2012). W ryzyku kredytowym oznaczałoby to przyjęcie założenia, że w przypadku kredytów całkowicie spłaconych w momencie  $t$  byłoby takie samo prawdopodobieństwo niewypłacalności kredytobiorcy w kolejnych momentach, jak kredytobiorców, których kredyty pozostały czynne i są dalej narażone na ryzyko niespłacania.

Niespełnienie założenia niezależności zdarzeń w modelu hazardu Coxa dla zdarzenia  $c$  może prowadzić do obciążenia oszacowania funkcji trwania. W ryzyku kredytowym, jeżeli dla jednostek cenzurowanych jest niższe ryzyko niewypłacalności niż dla pozostających w portfelu kredytów czynnych, to estymator  $\hat{S}_c(t)$  będzie niedoszacowywał rzeczywistą funkcję trwania (porównaj: Pintilie, 2011). Sytuacja taka może wystąpić, gdy spłata następuje z własnych zasobów finansowych kredytobiorcy. Kolejną wadą stosowania tego podejścia

jest to, że mimo iż funkcja intensywności zdarzenia  $c$  określona wzorem (11) jest interpretowalna, to oszacowana za jej pomocą wartość  $\hat{S}_c(t)$  nie może być interpretowana jako prawdopodobieństwo zdarzenia (Wycinka, 2015a).

Założenie niezależności zdarzeń nie może być w praktyce zweryfikowane, gdyż wymagałoby to znajomości rozkładów czasu trwania do wystąpienia każdego ze zdarzeń konkurujących i rozkładu czasu cenzurowania (Pintilie, 2006). Oznaczałoby to w analizie ryzyka kredytowego, że dla każdego kredytu wystąpiłyby (w dowolnej kolejności): niewypłacalność, wcześniejsza spłata i cenzurowanie. Wystąpienie jednego z tych zdarzeń uniemożliwia wystąpienie kolejnych. Znany jest więc tylko czas do wystąpienia pierwszego ze zdarzeń, a łączny rozkład czasu trwania nie jest znany.

Kleinbaum i Klein (2012) proponują, by w przypadku merytorycznych wątpliwości, czy zdarzenia są niezależne, wykorzystać analizę wrażliwości (*sensitivity analysis*) modeli Coxa, która bada możliwe ekstremalne odchylenia oszacowań modelu w przypadku niespełnienia założenia niezależności. Trzeba mieć jednak na uwadze to, że są to możliwe maksymalne błędy, a nie rzeczywiste błędy (Kleinbaum i Klein, 2012).

Analiza wrażliwości polega na zbudowaniu trzech modeli Coxa z tym samym zestawem predyktorów, w następujący sposób:

- model badany – przyjmuje się założenie niezależności zdarzeń, modelowane jest badane zdarzenie (osobno niewypłacalność i wcześniejsza spłata), a realizacje zdarzenia konkurującego traktowane są jako obserwacje cenzurowane;
- model ekstremalny I – zdarzenie badane i konkurujące są traktowane jednakowo i podlegają równocześnie modelowaniu;
- model ekstremalny II – modelowane jest badane zdarzenie, a jednostkom, które doznały zdarzenia konkurującego, przypisuje się najdłuższy czas trwania obserwowany w próbie i zalicza się je do obserwacji cenzurowanych.

Następnie dla każdego z predyktorów porównywane są oszacowania parametrów lub hazardów względnych z tych trzech modeli. Wartość oszacowania dla modelu badanego, która nie leży w przedziale wyznaczonym przez oszacowania dla modeli ekstremalnych, może świadczyć o potencjalnym błędzie popełnianym przy ocenie efektu z powodu nieprawidłowo przyjętego założenia o niezależności (Kleinbaum i Klein, 2012). Powyższa metoda, opisana przez Kleinbauma i Kleina (2012), wykorzystuje jedynie oszacowania punktowe parametrów modeli, pomijając błędy oszacowań. Dlatego w niniejszym opracowaniu zaproponowano, by analizę wrażliwości przeprowadzać na podstawie porównań przedziałów ufności zbudowanych według wzoru (10) dla modelu badanego i modeli ekstremalnych. Rozłączność przedziału dla modelu badanego i któregoś z modeli ekstremalnych może wskazywać na istotne różnice w interpretacji wpływu poszczególnych predyktorów na ryzyko i świadczyć o tym, że w rzeczywistości założenie niezależności zdarzeń nie jest spełnione. Przy interpretacji wyników analizy



wrażliwości należy jednak zachować ostrożność wobec tych zmiennych, dla których przedziały istotności hazardu względnego dla modeli ekstremalnych zawierają wartość 1. Jeśli oszacowania parametrów modeli ekstremalnych nie są statystycznie istotne, nie można stwierdzić, czy faktycznie pokrywają bądź nie przedziały ufności dla badanego modelu.

### 3.2 Modele ryzyka kredytowego niewymagające spełnienia założenia niezależności zdarzeń konkurujących

Jak argumentowano powyżej, założenie niezależności zdarzeń konkurujących może być niespełnione w przypadku ryzyka kredytowego. Alternatywnym sposobem badania wpływu predyktorów na analizowane zdarzenie z uwzględnieniem wpływu zdarzeń konkurujących jest wyznaczenie funkcji hazardu subrozkładu (*subdistribution hazard* lub *hazard function of subdistribution*) (Hu i Cheng, 2015), a następnie oszacowanie modelu regresji dla tej funkcji (model Fine-Graya).

Niech  $(T, C)$  będzie dwuwymiarową zmienną losową taką, że  $T > 0$  jest czasem do wystąpienia pierwszego zdarzenia, a  $C$  jest rodzajem zdarzenia ( $C \in \{1, \dots, p\}$ ). Funkcja subdystrybuanty (*cumulative incidence function*, CIF lub *subdistribution*) jest definiowana jako:

$$F_c(t) = P(T \leq t, C = c) \quad (14)$$

i wyraża prawdopodobieństwo, że zdarzenie  $c$  wystąpi do czasu  $t$  (Pintilie, 2006; Wycinka, 2015a).

Funkcja hazardu subrozkładu zdefiniowana została przez Graya (1988) jako:

$$\lambda_c^*(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t \leq T < t + \Delta t, C = c \mid T \geq t \vee (T \leq t \wedge C \neq c)) / \Delta t \quad (15)$$

i może być interpretowana jako prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia  $i$  w przedziale czasu  $\Delta t$ , pod warunkiem, że jednostka nie doznała wcześniej zdarzenia  $c$  bądź doznała wcześniej zdarzenia konkurującego (Pintilie, 2006, s. 71).

Fine i Gray (1999) zmodyfikowali model Coxa dla przypadku zdarzeń konkurujących. Jednostki, które doznały zdarzenia konkurującego, są ujmowane w modelu w kolejnych okresach, ale z malejącymi wagami. W rezultacie modelowana jest funkcja hazardu subrozkładu (wzór 15), a nie funkcja hazardu zdarzenia  $c$  (wzór 11).

Model Fine-Graya można zapisać jako:

$$\lambda^*(t, X) = \lambda_0^*(t) e^{\beta X^T}, \quad (16)$$

gdzie:

$\lambda^*$  – hazard subrozkładu,

$\lambda_0^*$  – hazard bazowy subrozkładu.



Wyniki estymacji modelu Fina-Graya pokazują rzeczywiste różnice w znaczeniu hazardu względnego subrozkładu pomiędzy jednostkami o ustalonych wariantach predyktorów (Pintilie, 2011).

### 3.3. Budowa modeli regresyjnych dla zdarzeń konkurujących

Do budowy modeli regresji ryzyka niewypłacalności (modeli skoringowych) najczęściej wykorzystuje się dane aplikacyjne kredytobiorców (tzn. dane pochodzące z wniosków kredytowych), takie jak wielkość kredytu i raty, cel kredytu, wiek kredytobiorcy, jego wykształcenie czy sytuacja majątkowa (por. Banasik, Crook i Thomas, 1999; Andreeva, 2006). Zmienne te mogą być zarówno ilościowe, jak i jakościowe. Na łamach literatury przedmiotu toczy się od wielu lat dyskusja o zaletach i wadach kategoryzowania zmiennych ilościowych w modelach regresji (Sauerbrei i Royston, 2010; Williams, Mandrekar, Mandrekar, Cha i Furth, 2006). Jednak ze względu na praktykę budowy modeli skoringowych, w których wykorzystuje się najczęściej zmienne skategoryzowane, w niniejszym badaniu wszystkie zmienne, w tym ilościowe, zostały skategoryzowane. Do kategoryzacji zmiennych wykorzystano metodę porównań krzywych Kaplana-Meiera zaproponowaną przez autorkę we wcześniejszym badaniu (Wycinka, 2015b). Dla każdej ze zmiennych wielodzielnych o  $r$  wariantach tworzonych jest  $r - 1$  zmiennych binarnych.

Istnieje wiele algorytmów doboru zmiennych do modelu. W badaniu dobór zmiennych do modelu przeprowadzono według procedury zaproponowanej przez Hosmera, Lemeshowa i May (2008). W pierwszym kroku zbudowano jednoczynnikowe modele Coxa dla każdego z predyktorów osobno. Hosmer zaleca, by do dalszej analizy wziąć te zmienne, dla których modele jednoczynnikowe są istotne co najmniej na poziomie istotności 0,2 (Hosmer, Lemeshow i May, 2008). Z udziałem tak wybranych predyktorów budowany jest model pełny. Następnie, posługując się procedurą wstecznej eliminacji (*backward elimination*), usuwa się z niego kolejno zmienne o najwyższym *p-value* (dla statystyki Walda) tak długo, aż wszystkie zmienne pozostawione w modelu są statystycznie istotne (Núñez, Steyerberg i Núñez, 2011). W przypadku zmiennych, dla których tylko część z wyodrębnionych we wstępnej analizie wariantów jest nieistotna, warianty te łączy się z tzw. grupą odniesienia, czyli tym wariantem zmiennej, który nie jest w modelu ujęty.

Kolejnym rozważanym problemem jest relacja liczby zmiennych objaśniających do wielkości próby. W analizie przeżycia wielkość próby nie jest mierzona liczbą jednostek, ale liczbą obserwacji niecenzurowanych (Hosmer i in., 2008). Dla każdego ze zdarzeń konkurujących może to być więc inna wielkość, jeśli udział jednostek w próbie, które doznały poszczególnych rodzajów zdarzeń, jest różny. Jak wykazali w badaniach symulacyjnych Peduzzi, Concato, Feinstein i Holford (1995), w analizie przeżycia na jedną zmienną objaśniającą powinno przypadać nie mniej niż 10 jednostek. Liczba zmiennych w modelu jest więc ograniczona liczbą zdarzeń w próbie.

#### 4. Charakterystyka próby i wyniki badań empirycznych

Badanie empiryczne przeprowadzono na podstawie próby 5 tys. 60-miesięcznych kredytów udzielonych osobom fizycznym przez jedną z instytucji kredytowych w Polsce. Każdy kredyt był obserwowany przez okres pierwszych 24 miesięcy trwania. Niewypłacalność (*default*) została zdefiniowana jako co najmniej 90-dniowe przeterminowanie spłaty raty. Wcześniejsza spłata oznaczała spłatę pozostałych zobowiązań wobec banku wraz z ostatnią spłacaną regularnie ratą i zamknięcie kredytu. W próbie badanych kredytów nie wystąpiły inne zdarzenia powodujące przerwanie harmonogramu spłat. Dla kredytów, dla których do 24 miesiąca nie wystąpiło 90-dniowe przeterminowanie lub wcześniejsza spłata, przyjęto w badaniu, że są obserwacjami cenzurowanymi w 24. miesiącu. W badanym okresie 90-dniowe przeterminowanie w spłacie kredytu wystąpiło co najmniej jeden raz w 297 umowach (5,9%). Wcześniej spłaconych zostało 2429 umów (48,58%). Pozostałe 2274 umowy (45,5%) były czynne w 24. miesiącu i nie wystąpiło do tego czasu przeterminowanie 90-dniowe.

Zestaw potencjalnych predyktorów ryzyka stanowił zbiór 15 zmiennych. Zmienne, na żądanie instytucji udostępniającej dane, zostały zanonimizowane, jak również zakodowano nazwy zmiennych za pomocą liter X z kolejnymi indeksami. Zmienne zostały skategoryzowane i następnie podzielone na zmienne dychotomiczne według procedury opisanej w punkcie 3.3. Na podstawie jednoczynnikowych modeli Coxa, szacowanych dla każdego z predyktorów osobno, wyodrębniono 18 zmiennych dychotomicznych, które były statystycznie istotnymi predyktorami niewypłacalności. Przyjmując założenie niezależności ryzyka niewypłacalności i wcześniejszej spłaty, tak wyodrębnione zmienne wykorzystano do budowy modelu pełnego dla ryzyka niewypłacalności (model 1), w którym wystąpienie wcześniejszej spłaty jest zaliczane do obserwacji cenzurowanych. W analogiczny sposób zbudowano model pełny dla wcześniejszej spłaty, gdzie wystąpienie niewypłacalności jest zaliczane do obserwacji cenzurowanych (model 3). Wyniki przedstawiono w tabeli 1.

Następnie metodą eliminacji wstecznej zredukowano każdy z modeli pełnych do modelu ze wszystkimi zmiennymi objaśniającymi istotnymi na poziomie  $\alpha = 0,05$  (odpowiednio modele 2 i 4). Dwanaście zmiennych zerojedynkowych okazało się istotnymi predyktorami niewypłacalności w modelu wieloczynnikowym (model 2), a jedenaście zmiennych w wieloczynnikowym modelu wcześniejszej spłaty (model 5). Prawie połowa zmiennych objaśniających w modelu Coxa dla niewypłacalności (model 2) nie znalazła się w modelu Coxa dla wcześniejszej spłaty (model 5), a jednocześnie trzy ze zmiennych w modelu 5 nie znalazły się w modelu 2. Wartości oszacowań intensywności w obu tych modelach nie mogą być bezpośrednio porównywane ze względu na to, że modele zawierają różniące się zestawy predyktorów. Aby ocenić, czy zmienne, które są zarówno predyktorami ryzyka

Zmienne objaśniające	Modele Coxa dla ryzyka niewypłacalności		Modele Coxa dla ryzyka wcześniejszej spłaty			Modele Fine-Graya dla ryzyka niewypłacalności			Modele Fine-Graya dla ryzyka wcześniejszej spłaty		
	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5	Model 6	Model 7	Model 8	Model 9	Model 10	Model 11
X3	1,036	.	0,885*	.	0,868*	1,100	.	.	0,883*	.	0,870*
X9	0,658*	0,642*	1,068	1,119	.	0,627*	0,602*	0,560*	1,105	1,158	.
X11	1,141	.	0,816*	.	0,829*	1,252	.	.	0,812*	.	0,808*
X12	1,486*	1,494*	1,043	1,021	.	1,477*	1,508*	1,507*	1,019	0,997*	.
X13	1,570*	1,597*	1,008	0,968	.	1,582*	1,617*	1,667*	0,993	0,953*	.
X14	1,393	.	0,932	.	.	1,506	.	1,604*	0,918	.	.
X1_2	0,934	.	1,056	.	.	0,924	.	.	1,052	.	.
X1_3	0,731	.	0,601*	.	0,779*	0,752	.	.	0,597*	.	0,575*
X2_2	0,547*	0,547*	0,809	0,806	0,761*	0,638	0,648	.	0,841	0,840	.
X2_3	0,610	0,481*	1,443	0,826	.	0,680	0,568	.	1,525	0,870	1,823*
X4_2	2,274*	2,263*	1,283*	1,281*	1,314*	2,043*	2,006*	2,063*	1,184*	1,182	1,181*
X4_6	0,397*	0,400*	0,973	0,965	.	0,400*	0,406*	0,404*	1,011	1,002*	.
X5_2	0,765	.	1,346*	.	1,351*	0,638*	.	0,589*	1,385*	.	1,383*
X5_3	0,554*	0,639*	1,281*	1,037	1,262*	0,491*	0,629*	0,484*	1,331*	1,059*	1,312*
X6_2	1,832*	1,958*	1,191*	1,107	1,192*	1,681*	1,851*	1,619*	1,151*	1,065	1,152*
X6_3	1,268	1,405*	1,286*	1,202*	1,255*	1,151	1,322	.	1,272*	1,186*	1,235*
X10_2	0,641*	0,615*	0,837*	0,904	0,861*	0,670*	0,635*	0,576*	0,851*	0,918	0,841*
X10_3+4	0,621*	0,554*	0,730*	0,868*	0,757*	0,668	0,569*	0,510*	0,743*	0,884	0,737*

(\*) Istotność na poziomie 0,05; (.) zmienne nieujęte w modelu.

Tab. 1. Wartości hazardu względnego dla modeli Coxa oraz Fine-Graya oszacowanych dla ryzyka niewypłacalności oraz ryzyka wcześniejszej spłaty.

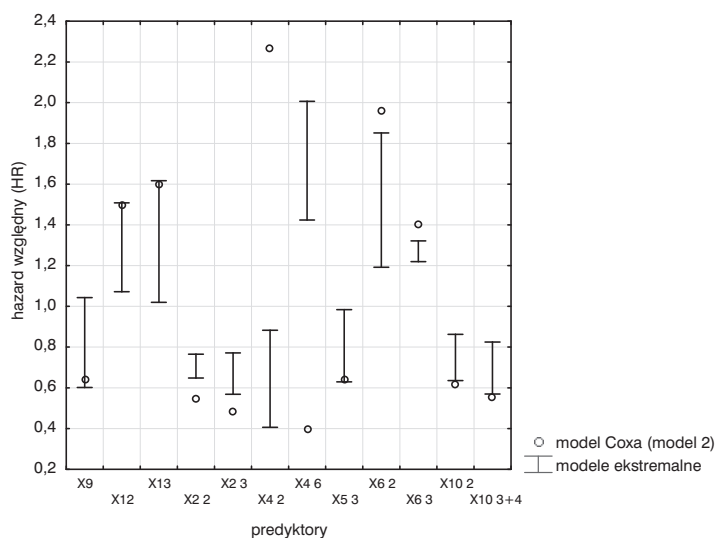
Źródło: opracowanie własne na podstawie badania empirycznego.

niewypłacalności, jak i wcześniejszej spłaty, w taki sam sposób wpływają na oba zdarzenia, zbudowano model Coxa dla wcześniejszej spłaty (model 4) z predyktorami, które wcześniej zostały wybrane do modelu 2. W modelu tym większość z predyktorów niewypłacalności okazała się nieistotnymi predyktorami wcześniejszej spłaty, a te zmienne, które w obu modelach były istotne (X4\_2; X6\_3; X10\_3+4), różniły się oszacowaniami hazardów względnymi. Potwierdza to wnioski z wcześniejszych badań, że oba rodzaje ryzyka powinny być modelowane oddzielnie przy wykorzystaniu innego zestawu predyktorów.

W następnym kroku zweryfikowano założenie niezależności niewypłacalności i wcześniejszej spłaty za pomocą analizy wrażliwości.

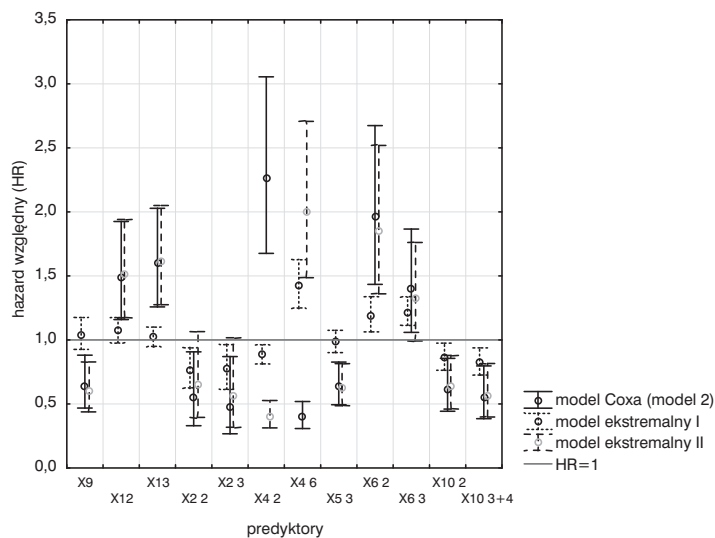
Rysunek 1 przedstawia oszacowania hazardów względnymi dla modelu 2 i zbudowanych dla niego modeli ekstremalnych według metody opisanej w podpunkcie 3.2. Dla większości zmiennych oszacowanie punktowe hazardu względnego w modelu badanym (model 2) leży poza przedziałem wyznaczonym przez oszacowania hazardów względnymi w modelach ekstremalnych (poza X9, X12, X13, X5\_3). Dla tych zmiennych istnieje zagrożenie błędnej interpretacji wpływu poszczególnych zmiennych objaśniających na ryzyko niewypłacalności, jeśli przedwczesna spłata będzie traktowana jako zdarzenie niezależne.

Dla większości zmiennych (poza X4\_2 i X4\_6) odległości między oszacowaniami hazardu względnego w modelu badanym i modelach są



Rys. 1. Analiza wrażliwości modelu Coxa dla ryzyka niewypłacalności (model 2). Źródło: opracowanie własne na podstawie badania empirycznego.

nieznaczące, co może sugerować, że po uwzględnieniu rozproszenia estymatorów różnice te nie będą statystycznie istotne. Dlatego w następnym kroku przeprowadzono zmodyfikowaną analizę wrażliwości według propozycji autorki (95% przedziały ufności dla oszacowań hazardu względnego). Z rysunku 2 wynika, że brak spełnienia założenia niezależności nie wpływa istotnie na interpretacje hazardu względnego dla zmiennych  $X_{2,2}$ ,  $X_{2,3}$ ,  $X_{6,3}$ ,  $X_{10,2}$ ,  $X_{10,3+4}$ . Jest to więc inny zestaw predyktorów niż ten wskazany na rysunku 1. Ponadto dla większości zmiennych przedziały ufności modelu badanego pokrywają się z przedziałami dla modelu ekstremalnego II, a nie pokrywają się z przedziałami dla modelu ekstremalnego I. Model ekstremalny I zakłada, że kredyty przedwcześnie spłacone są obciążone wysokim ryzykiem niewypłacalności, czyli kredytobiorca miał problemy ze spłatą zobowiązań i dlatego refinansował kredyt. Przedwczesna spłata zapobiegłaby grożącej niewypłacalności. Natomiast model ekstremalny II przyjmuje założenie, że przedwczesnych spłat dokonują kredytobiorcy w dobrej sytuacji finansowej nienarażeni na ryzyko niewypłacalności. Zgodność oszacowań analizowanego modelu Coxa (model 2) z modelem ekstremalnym II sugeruje, że w portfelu kredytów, z którego była wygenerowana próba, wcześniejsze spłaty były dokonywane przez kredytobiorców niezagrażonych ryzykiem niewypłacalności. Wniosek ten jest zgodny z obserwacjami kredytodawcy.



Rys. 2. Przedziały ufności hazardu względnego w analizie wrażliwości modelu Coxa dla ryzyka niewypłacalności (model 2). Źródło: opracowanie własne na podstawie badania empirycznego.

Przedziały ufności dla modelu ekstremalnego I są znacznie węższe niż przedziały ufności dla modelu badanego i modelu ekstremalnego. Wynika to z tego, że w modelu ekstremalnym I zdarzenie konkurujące jest traktowane jak zdarzenie badane, co spowodowało zwiększenie liczby obserwacji niecenzurowanych z 297 do 2726.

Interesującą anomalię odnotowano dla zmiennych X4\_2 oraz X4\_6, które są zmiennymi dychotomicznymi utworzonymi z jednej zmiennej wielodzielnej o trzech wariantach. Oszacowania hazardu względnego w obu modelach ekstremalnych wskazują na przeciwny kierunek wpływu tych zmiennych, niż ma to miejsce w przypadku modelu badanego (model 2). Zmienna X4 i zasadność jej wykorzystania w modelu oceny ryzyka niewypłacalności powinny zostać przeanalizowane przez kredytodawcę.

Ze względu na to, że analiza wrażliwości modelu niewypłacalności wskazuje na możliwe niespełnienie założenia niezależności ryzyka niewypłacalności i ryzyka wcześniejszej spłaty, oszacowano parametry modelu Fine-Graya dla ryzyka niewypłacalności. Tak jak w przypadku modeli Coxa, dla ryzyka niewypłacalności zbudowany został model ze wszystkimi zmiennymi (model 6), a następnie utworzony z niego metodą eliminacji wstecznej model tylko z istotnymi predyktorami (model 8). Model ten zawiera inny zestaw predyktorów niż analogiczny model Coxa (model 2). W celu możliwości porównania oszacowań modelu 2 Coxa z oszacowaniami modelu Graya został zbudowany model 7 z zestawem parametrów, które były wykorzystane w modelu 2. W modelu tym część ze zmiennych jest statystycznie nieistotna i wszystkie oszacowania hazardów względnych różnią się nieznacznie od odpowiednich oszacowań w modelu Coxa. Różnice te dotyczą jednak tylko natężenia wpływu predyktorów na ryzyko, a nie kierunku oddziaływania.

Taką samą metodę postępowania zastosowano dla modeli Graya dla ryzyka wcześniejszej spłaty (tabela 1). W pierwszej kolejności zbudowany został model pełny (model 9), a następnie metodą eliminacji wstecznej model 11. Natomiast model 10 zawiera zestaw predyktorów taki, jaki był wykorzystany w modelach 2, 4 oraz 7. Oszacowania hazardów względnych modeli 2, 4 oraz 7 mogą być bezpośrednio porównywane. Tak samo jak zaobserwowano w przypadku ryzyka niewypłacalności, w modelu Graya dla ryzyka wcześniejszej spłaty wystąpiły zmiany w zestawie predyktorów względem modelu Coxa (model 5 i model 11). Nieznaczne różnice występują też w oszacowaniach hazardów względnych w obu modelach. Mniejsze różnice w oszacowaniach hazardów względnych w modelach dla ryzyka wcześniejszej spłaty względem modeli dla niewypłacalności wynikają z różnic w liczbie obu zdarzeń, a przez to faktycznej liczbie jednostek wykorzystanych przy szacowaniu parametrów modelu (297 niewypłacalności względem 2429 wcześniejszych spłat).

## 5. Podsumowanie

Różnice między oszacowaniami modelu Coxa i modelu Fine-Graya nie są duże, jednak zastosowanie procedury eliminacji wstecznej doprowadziło ostatecznie do innych zestawów zmiennych w analogicznych modelach (modele 2 i 8 oraz modele 5 i 11). Może to prowadzić do różnic w klasyfikacji kredytobiorców według ryzyka niewypłacalności i ryzyka wcześniejszej spłaty przeprowadzonych za pomocą modelu Coxa i modelu Fine-Graya.

Interpretując oszacowania hazardu względnego dla poszczególnych modeli, trzeba mieć na uwadze to, że hazard względny w modelu Coxa dla niewypłacalności (modele 1 i 2) pokazuje ilukrotnie kredytobiorca z danym wariantem zmiennej jest bardziej narażony na ryzyko niewypłacalności niż kredytobiorca nieposiadający tego wariantu (*ceteris paribus*) przy założeniu, że ryzyko wcześniejszej spłaty nie występuje. Natomiast modele Fine-Graya (modele 6–8) pokazują ryzyko niewypłacalności, biorąc pod uwagę towarzyszące ryzyko wcześniejszej spłaty. Model Coxa będzie więc odpowiedni do oceny ryzyka niewypłacalności w portfelach, w których możliwość wcześniejszej spłaty zostanie ograniczona przez kredytodawcę, natomiast w portfelach narażonych na ryzyko wcześniejszej spłaty bardziej prawidłowe oszacowania daje model Fine-Graya.

Analiza wrażliwości modelu Coxa z wykorzystaniem przedziałów ufności pozwoliła na ocenę, czy założenie niezależności zdarzeń jest spełnione, oraz sformułowanie hipotezy odnośnie ryzyka niewypłacalności dla kredytobiorców, którzy dokonali wcześniejszej spłaty kredytu.

Modele Coxa i modele Fine-Graya mogą być użytecznym narzędziem w analizie ryzyka kredytowego. Jak pokazały wyniki przeprowadzonego badania empirycznego, modele te umożliwiają identyfikację cech kredytów i kredytobiorców podatnych na poszczególne rodzaje ryzyka kredytowego w określonym czasie.

### Przypisy

- <sup>1</sup> Pojęcia losowości cenzurowania, niezależności cenzurowania oraz nieinformacyjności cenzurowania są często utożsamiane, dlatego że często wszystkie trzy założenia są jednocześnie spełnione, nie są to jednak pojęcia równoznaczne. Kleinbaum i Klein (2012) podkreślają różnice między tymi pojęciami i zwracają uwagę na konieczność prawidłowego ich rozróżniania.

### Bibliografia:

- Andreeva, G. (2006). European Generic Scoring Models Using Survival Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 57(10), 1180–1187.
- Balicki, A. (2006). *Analiza przeżycia i tablice wymieralności*, Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
- Banasik, J., Crook, N. i Thomas, L. (1999). Not if but When Will Borrowers Default. *The Journal of the Operational Research Society*, 50(12), 1185–1190.



- Bellotti, T. i Crook, J. (2007). Credit Scoring with Macroeconomic Variables Using Survival Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 60(12), 1699–1707.
- Fine, J. i Gray, R. (1999). A Proportional Hazards Model for the Subdistribution of a Competing Risk. *Journal of the American Statistical Association*, 94, 496–509.
- Gray, R. (1988). A Class of k-sample Tests for Comparing the Cumulative Incidence of a Competing Risk. *Annals of Statistics*, 16, 1141–1154.
- Gwizdała, J. (2011). *Ryzyko kredytowe w działalności banku komercyjnego*. Gdańsk: Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego.
- Hosmer, D., Lemeshow, S. i May, S. (2008). *Applied Survival Analysis. Regression Modeling of Time-to-Event-Data*. Wiley.
- Hu, N. i Cheng, H. (2015). Survival Analysis and ROC Analysis in Analyzing Credit Risks. W: J. Jakóbczak (red.), *Analyzing Risk through Probabilistic Modeling in Operations Research* (s. 380–403). IGI Global.
- Jackowska, B. (2013). *Modele dalszego trwania życia oraz ich zastosowania w przypadku osób starszych*. Gdańsk: Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego.
- Jajuga, K. (2004). Modele ryzyka kredytowego a kredyty hipoteczne. W: K. Jajuga i Z. Krysiak (red.), *Zarządzanie ryzykiem kredytowym wierzycielności hipotecznych* (s. 23–31). Warszawa: Związek Banków Polskich.
- Kleinbaum, D. i Klein, M. (2012). *Survival Analysis. A Self-Learning Text*. Springer.
- Lunn, M. i McNeil, D. (1995). Applying Cox Regression to Competing Risks. *Biometrics*, 51, 524–532.
- Meluch, P. (2004). Ryzyko przedpłaty kredytu – warunki pomiaru. W: K. Jajuga i Z. Krysiak (red.), *Ryzyko kredytowe wierzycielności hipotecznych. Modelowanie i zarządzanie* (s. 23–31). Warszawa: Związek Banków Polskich.
- Narain, B. (1992). Survival Analysis and the Credit-granting Decision. W: L. Thomas, J. Crook i D. Edelman (red.), *Credit Scoring and Credit Control* (s. 109–122). Oxford: Oxford University Press.
- Núñez, E., Steyerberg, E. i Núñez, J. (2011). Regression Modeling Strategies. *Revista Española de Cardiología*, 64(6), 501–507.
- Peduzzi, P., Concato, J., Feinstein, A. i Holford, T. (1995). Importance of Events per Independent Variable in Proportional Hazards Regression Analysis. II. Accuracy and Precision of Regression Estimates. *Journal of Clinical Epidemiology*, 48(12), 1503–1510.
- Pintilie, M. (2006). *Competing Risks. A practical Perspective*. Wiley.
- Pintilie, M. (2011). An Introduction to Competing Risks Analysis. *Revista Española de Cardiología*, 64(7), 599–605.
- Sauerbrei, W. i Royston, P. (2010). Continuous Variables: To Categorize Or To Model? W: C. Reading (red.), *Data and Context in Statistics Education: Towards an Evidence-based Society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010)*. Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Pozyskano z: [http://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8\\_6D1\\_SAUERBREI.pdf](http://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_6D1_SAUERBREI.pdf).
- Stepanova, M. i Thomas, L. (2002). Survival Analysis Methods for Personal Loan Data. *Operations Research*, 50(2), 277–289.
- Thomas, L. (2000). A Survey of Credit and Behavioural Scoring: Forecasting Financial Risk of Lending to Consumers. *International Journal of Forecasting*, 16, 149–172.
- Tong, E., Mues, C. i Thomas, L. (2012). Mixture Cure Models in Credit Scoring: If and When Borrowers Default. *European Journal of Operational Research*, 218, 132–139, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2011.10.007>.
- Williams, B., Mandrekar, J., Mandrekar, S., Cha, S. i Furth, A. (2006). *Finding Optimal Cutpoints for Continuous Covariates with Binary and Time-to-Event Outcomes. Technical Report Series #79*. Rochester: Department of Health Sciences Research, Mayo Clinic. Pozyskano z: <http://www.mayo.edu/research/documents/biostat-79pdf/DOC-10027230>.

- Wycinka, E. (2015a). Modelowanie czasu do zaprzestania spłat rat kredytu lub wcześniejszej spłaty kredytu jako zdarzeń konkurujących. *Problemy Zarządzania*, 13(3), 146–157, <http://dx.doi.org/10.7172/1644-9584.55.10>.
- Wycinka, E. (2015b). Time to Default Analysis in Personal Credit Scoring. *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, (351), 527–536, <http://dx.doi.org/10.15611/pn.2015.381.381>.