Problemy Zarządzania – Management Issues, vol. 16, no. 3(76) part 2: 37–49
ISSN 1644-9584, © Wydział Zarządzania UW
DOI 10.7172/1644-9584.76.3

Modelowanie kowariancji kursów walutowych z zastosowaniem cen minimalnych i maksymalnych[1]

Nadesłany: 12.02.18 | Zaakceptowany do druku: 24.05.18

Piotr Fiszeder*

W artykule przedstawiono propozycję modelowania kursów walutowych z zastosowaniem cen minimalnych i maksymalnych, która prowadzi do lepszego opisu zależności na rynku walutowym. Konstruowane na podstawie zaproponowanego wielorównaniowego modelu GARCH prognozy kowariancji stóp zwrotu są trafniejsze niż prognozy konstruowane na podstawie wyłącznie cen zamknięcia. Wielorównaniowe modele GARCH należą do najbardziej popularnych modeli opisujących finansowe szeregi czasowe. Przedstawiona propozycja modelu nie wymaga pozyskania dodatkowych danych, ponieważ dzienne ceny minimalne i maksymalne są na ogół dostępne równolegle z cenami zamknięcia, co jest ważne z punktu widzenia aplikacji modelu na rynku Forex.

Słowa kluczowe: kursy walutowe, prognozowanie, ceny minimalne i maksymalne, kowariancja.

Exchange Rate Covariance Modelling by Means of Minimum and Maximum Prices

Submitted: 12.02.18 | Accepted: 24.05.18

The article presents a proposal for exchange rate modelling by means of minimum and maximum prices that enables a better description of dependencies in the foreign exchange market. Forecasts of return rate covariance based on the proposed multiple-equation GARCH model are more accurate than those produced solely on the basis of closing prices. Multiple-equation GARCH models are among the most popular models describing financial time series. The proposed model does not require additional data because daily minimum and maximum prices are generally available together with closing prices, which is important from the point of view of the application of the model in the Forex market.

Keywords: exchange rates, forecasting, minimum and maximum prices, covariance.

JEL: G0, G1, G17

* **Piotr Fiszeder** – dr hab. prof. UMK, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Katedra Ekonometrii i Statystyki.

Adres do korespondencji: Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Katedra Ekonometrii i Statystyki, ul. Gagarina 13a, 87-100 Toruń, Polska; e-mail: piotr.fiszeder@umk.pl.

1. Wprowadzenie

W analizie finansowych szeregów czasowych wykorzystywane są na ogół ceny zamknięcia instrumentów finansowych, tymczasem w ogólnie dostępnych bazach danych znajdują się najczęściej również ceny minimalne i maksymalne, które mogą dostarczyć wielu cennych informacji o kształtowaniu się procesów finansowych. Wartości minimalne i maksymalne były dużo wcześniej stosowane w takich dziedzinach jak meteorologia (np. do opisu warunków termicznych), hydrologia (np. do opisu poziomu wody), sozologia (np. do opisu stężeń zanieczyszczeń powietrza), energetyka (np. do określenia zapotrzebowania na moc), inżynieria (np. do kontroli jakości). Za jedno z pierwszych zastosowań w finansach można uznać pracę Mandelbrota (1971), w której zakres cen, czyli różnicę między ceną maksymalną a minimalną wykorzystano do badania występowania długoterminowych zależności w cenach aktywów finansowych. Ceny minimalne i maksymalne łącznie z cenami otwarcia i zamknięcia były od dawna stosowane w analizie technicznej. Ceny minimalne i maksymalne wykorzystywane są przez inwestorów między innymi do: prognozowania cen na rynkach finansowych na podstawie analizy świec japońskich (metoda rozwinięta w XIX w. w Japonii, zob. Nison, 1991), pomiaru zmienności (Wilder, 1978; wprowadził pojęcie prawdziwego zakresu zmian jako miary zmienności, natomiast Taylor (1987) pokazał, że, wykorzystując ceny minimalne i maksymalne do konstrukcji średnich ruchomych, można uzyskać trafniejsze prognozy zmienności), pomiaru siły trendu za pomocą wskaźników ruchu kierunkowego (Wilder, 1978).

Szersze wykorzystanie cen minimalnych i maksymalnych w pracach naukowych wystąpiło w latach 80. XX wieku. Parkinson (1980) jako pierwszy sformułował estymator wariancji konstruowany na podstawie cen minimalnych i maksymalnych. Dane takie mogą być również zastosowane do analizy przedziałów określonych przez cenę minimalną i maksymalną (zob. np. Arroyo, González-Rivera, Maté, 2010; Maia, de Carvalho, 2011), które można wykorzystać do pomiaru i modelowania zmienności.

Stosowane w praktyce modele zmienności instrumentów finansowych w przeważającej części konstruowane są wyłącznie na podstawie cen zamknięcia. Tymczasem wykorzystanie informacji o cenach minimalnych i maksymalnych może prowadzić do znacznie dokładniejszych szacunków zmienności. Wyniki badań empirycznych i symulacyjnych wskazują, że estymatory wariancji konstruowane na podstawie cen otwarcia, minimalnych, maksymalnych i zamknięcia są od ponad pięciu do nawet ponad siedmiu razy efektywniejsze niż estymatory konstruowane tylko na cenach zamknięcia (zob. np. Garman, Klass, 1980; Parkinson, 1980; Rogers, Satchell, 1991).

Pomimo dobrych własności statystycznych estymatory te nie znalazły jednak powszechnego zastosowania w badaniach empirycznych z uwagi na pomijanie dynamicznych zależności dotyczących wariancji. W ostatnich kil-

 DOI 10.7172/1644-9584.76.3

kunastu latach powstało wiele dynamicznych modeli konstruowanych na podstawie zakresu cen (zob. np. Alizadeh, Brandt, Diebold, 2002; Mapa, 2003; Chou, 2005; Brandt, Jones, 2006). Wszystkie cytowane prace dotyczą procesów jednowymiarowych. W aplikacjach finansowych bardzo rzadko jednak zastosowanie jednowymiarowych modeli okazuje się wystarczające. Analiza procesów wielowymiarowych jest konieczna przy konstrukcji i wycenie portfeli instrumentów finansowych oraz zarządzaniu ich ryzykiem.

Prace dotyczące modeli wielorównaniowych konstruowanych na podstawie cen minimalnych i maksymalnych znajdują się ciągle na wstępnym etapie badań. Idea konstrukcji wielorównaniowych modeli zmienności z zastosowaniem cen minimalnych i maksymalnych polega na wykorzystaniu jednorównaniowych specyfikacji modeli opartych na zakresie cen i włączeniu ich do budowy wielorównaniowych modeli macierzy kowariancji stóp zwrotu (zob. Chou, Cai, 2009; Chou, Wu, Liu, 2009; Asai, 2013). Podejście proponowane w niniejszym artykule jest jednak inne, ponieważ nie odwołuje się do modeli jednowymiarowych.

Głównym wkładem pracy jest propozycja modelowania kursów walutowych z zastosowaniem cen minimalnych i maksymalnych, która prowadzi do lepszego opisu zależności na rynku walutowym. Propozycja polega na zastosowaniu estymatora kowariancji konstruowanego na podstawie cen minimalnych i maksymalnych (zob. Brunetti i Lildholdt, 2002; Brand i Diebold, 2006) oraz modelu BEKK (Baba, Engle, Kraft i Kroner, 1990; Engle i Kroner, 1995). Konstruowane na podstawie zaproponowanego wielorównaniowego modelu GARCH prognozy kowariancji stóp zwrotu są trafniejsze niż prognozy konstruowane na podstawie wyłącznie cen zamknięcia.

Układ pracy jest następujący. W podrozdziale 2 zaprezentowano wybrane metody estymacji kowariancji stóp zwrotu na podstawie cen minimalnych i maksymalnych. W podrozdziale 3 przedstawiono propozycję wielorównaniowego modelu GARCH, do estymacji którego stosuje się ceny minimalne i maksymalne. W podrozdziale 4 modelowano kursy walutowe na rynku Forex, a w 5 dokonano analizy trafności prognoz. W podrozdziale 6 przedstawiono wnioski.

2. Metody estymacji kowariancji stóp zwrotu na podstawie cen minimalnych i maksymalnych

Wykorzystanie do estymacji kowariancji cen minimalnych i maksymalnych, zamiast cen zamknięcia, jest intuicyjnie uzasadnione. Załóżmy, że ceny dwóch aktywów zachowują się w ciągu sesji w podobny sposób, tj. rosną w ciągu dnia o 3%, a następnie spadają, osiągając na koniec dnia poziom cen zamknięcia z poprzedniej sesji. Kowariancja szacowana jako iloczyn dziennych stóp zwrotu (obliczanych na podstawie bieżącej ceny zamknięcia oraz ceny zamknięcia z poprzedniego dnia) informuje o braku zależności, podczas gdy zależność między wspomnianymi aktywami była silna i na taką zależność wskazuje estymator kowariancji konstruowany na podstawie cen minimalnych i maksymalnych.

2.1. Ko-zakres procesów

Brunetti i Lildholdt (2002) zaproponowali, aby do estymacji kowariancji wykorzystać formułę na wariancję sumy zmiennych:

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y). \tag{1}$$

Jeżeli możliwe jest oszacowanie wariancji z wykorzystaniem zakresu cen dla $X + Y$, X oraz Y, wówczas z równania (1) można wyznaczyć kowariancję $\mathrm{cov}(X,Y)$.

Niech $0 \le t \le \tau$ oraz załóżmy, że logarytmy cen są skorelowanymi arytmetycznymi ruchami Browna bez dryfu oznaczonymi jako P_t i Q_t:

$$dP_t = \sigma_P dW_t, \tag{2}$$

$$dQ_t = \sigma_P dZ_t, \tag{3}$$

$$E\left(\begin{bmatrix} dW_t \\ dZ_t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$E\begin{pmatrix} (dW_t)^2 & dW_t dZ_t \\ dW_t dZ_t & (dZ_t)^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} dt & \rho_{P,Q} dt \\ \rho_{P,Q} dt & dt \end{bmatrix}, \quad \sigma_{P,Q} = \sigma_P \, \sigma_Q \, \sigma_{P,Q}, \tag{5}$$

gdzie W_t, Z_t są standardowymi procesami Wienera.

Rozważana jest liniowa kombinacja $\beta_P P_t + \beta_Q Q_t$. Brunetti i Lildholdt (2002) definiują ko-zakres (ang. *co-range*) w następujący sposób:

$$\hat{\sigma}_{P,Q} = \frac{1}{\tau} \frac{l^2_{\beta_P P + \beta_Q Q} - l^2_{\beta_P P} - l^2_{\beta_Q Q}}{8 \ln(2) \beta_P \beta_Q}, \tag{6}$$

gdzie $l_X = \sup_{0<t\le\tau} X_t - l_X = \inf_{0<t\le\tau} X_t$ i oznacza zakres cen procesu X_t.

Powyższa formuła może być wyprowadzona na podstawie równania (1), jeśli przyjmie się, że wariancje są szacowane na podstawie estymatora Parkinsona (1980) w postaci:

$$\sigma^2_{tP} = [\ln(H_t / L_t)]^2 / (4 \ln 2), \tag{7}$$

gdzie H_t i L_t oznaczają dzienne ceny maksymalne i minimalne.

 DOI 10.7172/1644-9584.76.3

Przy spełnieniu powyższych założeń $\hat{\sigma}_{P,Q}$ jest nieobciążonym estymatorem $\sigma_{P,Q}$. Niestety zakres $\beta_P P_t + \beta_Q Q_t$ nie może być wyznaczony na podstawie zakresów $\beta_P P_t$ oraz $\beta_Q Q_t$. Z tego względu poza pewnymi przypadkami, do których można zaliczyć kursy walutowe (zob. przedstawiona w dalszej części koncepcja sformułowana przy założeniu braku możliwości arbitrażu, Brand, Diebold, 2006), do konstrukcji tego estymatora wymagana jest znajomość cen wszystkich transakcji w ciągu dnia (ang. *tick-by-tick data*).

Macierz kowariancji P_t i Q_t konstruowaną na podstawie zakresu cen można przedstawić w następującej formie:

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_P^2 & \hat{\sigma}_{P,Q} \\ \hat{\sigma}_{P,Q} & \hat{\sigma}_Q^2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

gdzie $\hat{\sigma}_P^2$ oraz $\hat{\sigma}_Q^2$ są estymatorami Parkinsona dla P_t i Q_t.

Tak sformułowana macierz jest zawsze dodatnio półokreślona w przypadku dwuwymiarowym. Dla większej liczby wymiarów ta cecha macierzy nie jest jednak zapewniona. Można ją uzyskać na przykład przez zastosowanie dekompozycji Choleskiego. Z uwagi na nieliniowe relacje między elementami macierzy kowariancji a elementami dekompozycji Choleskiego może być jednak trudno o zachowanie nieobciążoności estymatora macierzy kowariancji (zob. Brunetti i Lildholdt, 2002).

Badania symulacyjne dla procesów Browna bez dryfu wskazują, że powyższy estymator kowariancji konstruowany na podstawie zakresów cen jest ponad pięć razy efektywniejszy od estymatora konstruowanego na podstawie stóp zwrotu z cen zamknięcia. Efektywność tego estymatora jest zatem zbliżona do efektywności estymatora Parkinsona dla wariancji.

Brunetti, Lildholdt (2002) zastosowali ko-zakres do badania dziennych stóp zwrotu trzech kursów walutowych funta szterlinga względem franka szwajcarskiego, franka szwajcarskiego względem dolara amerykańskiego oraz dolara amerykańskiego względem funta szterlinga. Szacunki odchyleń standardowych dla wszystkich rozważanych par walutowych były mniejsze dla kowariancji konstruowanej na podstawie zakresów cen w porównaniu do kowariancji formułowanej na podstawie cen zamknięcia, co sugeruje większą efektywność estymatora z zastosowaniem cen minimalnych i maksymalnych.

2.2. Dwuwymiarowa koncepcja zakładająca brak możliwości arbitrażu

Brand, Diebold (2006) zaproponowali podejście, którego podstawą jest również formuła na wariancję sumy zmiennych. Estymację kowariancji przeprowadza się na podstawie formuły:

$$\mathrm{cov}(X, Y) = [\mathrm{var}(X + Y) - \mathrm{var}(X) - \mathrm{var}(Y)]/2, \tag{9}$$

gdzie wariancje szacowane są z wykorzystaniem cen minimalnych i maksymalnych (autorzy postulują zastosowanie estymatora Parkinsona).

Powyższa formuła ma jednak stosunkowo wąskie zastosowanie, ponieważ muszą być znane wartości minimalne i maksymalne dla sumy zmiennych. Jest to naturalne w przypadku analizy kursów walutowych. Załóżmy, że dane są dwa kursy względem waluty C oznaczone jako A/C oraz B/C. Wówczas przy założeniu, że nie ma możliwości arbitrażu walutowego trójstronnego, stopa zwrotu kursu krzyżowego dana jest formułą:

$$\Delta \mathrm{ln} A/B = \Delta \mathrm{ln} A/C - \Delta \mathrm{ln} B/C. \tag{10}$$

Estymator kowariancji stóp zwrotu dany jest wówczas wzorem:

$$\begin{gathered} \mathrm{cov}(\Delta \mathrm{ln} A/C, \Delta \mathrm{ln} B/C) = \\ [\mathrm{var}(\Delta \mathrm{ln} A/C) + \mathrm{var}(\Delta \mathrm{ln} B/C) - \mathrm{var}(\Delta \mathrm{ln} A/B)]/2. \end{gathered} \tag{11}$$

Pomysł wykorzystania koncepcji braku arbitrażu do szacowania kowariancji był już wcześniej stosowany m.in. w pracach: Brunetti, Lildholdt (2002) dla ko-zakresu, Andersen, Bollerslev, Diebold, Labys (2003) dla kowariancji zrealizowanej oraz Lopez, Walter (2001) dla implikowanej kowariancji szacowanej na podstawie implikowanych wariancji poszczególnych kursów walutowych.

Przedstawiony estymator kowariancji jest liniową kombinacją wariancji. Jeżeli do estymacji wariancji zostanie zastosowany estymator Parkinsona, to estymator kowariancji będzie nieobciążony przy założeniu tych samych warunków, jakie muszą być spełnione dla nieobciążoności estymatora Parkinsona (Brand i Diebold, 2006).

Wyniki przeprowadzonych na podstawie symulacji Monte Carlo badań wskazują, że szacunki kowariancji estymowane na podstawie zakresów cen są zaniżone. Niedoszacowanie zmniejsza się jednak wraz ze wzrostem częstotliwości obserwacji. Efekty mikrostruktury rynku wynikające ze spreadu bid-ask oraz niesynchroniczności transakcji (z uwagi na niską płynność instrumentów obserwowane w danym momencie ceny często są cenami transakcji, które wystąpiły wcześniej) mają mniejszy negatywny wpływ na kowariancje szacowane na podstawie zakresu cen niż na kowariancje zrealizowane szacowane na podstawie danych śróddziennych (Brand i Diebold, 2006).

3. Wielorównaniowy model GARCH z cenami minimalnymi, maksymalnymi i zamknięcia

Wielorównaniowe modele GARCH należą do najbardziej popularnych modeli opisujących finansowe szeregi czasowe.

Niech ε_t jest wektorem o wymiarach $N \times 1$ i oznacza wielowymiarowy składnik losowy równania opisującego warunkowe wartości oczekiwane stóp zwrotu (w szczególnym przypadku może to być wielowymiarowy proces stóp zwrotu) oraz można go przedstawić w następującej postaci:

DOI 10.7172/1644-9584.76.3

$$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim \mathrm{D}(0, \boldsymbol{cov}_t), \tag{12}$$

gdzie ψ_{t-1} oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w chwili t–1, D jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa, a $\boldsymbol{cov}_t$ jest warunkową macierzą kowariancji o wymiarach $N \times N$.

Jednym z bardziej popularnych wielorównaniowych modeli GARCH jest model BEKK[2] (Baba, Engle, Kraft i Kroner, 1990; Engle i Kroner 1995). Zaletami tego modelu są dodatnia określoność macierzy kowariancji, możliwość opisania zmieniających się w czasie warunkowych współczynników korelacji między stopami zwrotu oraz możliwość opisania wzajemnych relacji między warunkowymi wariancjami (kowariancjami). Model BEKK(p,q) konstruowany na podstawie stóp zwrotu z cen zamknięcia można zapisać jako:

$$\boldsymbol{cov}_t = \boldsymbol{CC}' + \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{D}_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i} \boldsymbol{D}'_i + \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{E}_j \boldsymbol{cov}_{t-j} \boldsymbol{E}'_j, \tag{13}$$

gdzie $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}_i$ oraz $\boldsymbol{E}_j$ są macierzami parametrów o wymiarach $N \times N$, a macierz $\boldsymbol{C}$ jest dodatkowo macierzą trójkątną.

Proponowana specyfikacja modelu BEKK z zastosowaniem cen minimalnych i maksymalnych, oznaczona dalej jako BEKK-HL(p,q) dana jest formułą:

$$\boldsymbol{cov}_t = \boldsymbol{KK}' + \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{L}_i \boldsymbol{G}_i \boldsymbol{L}'_i + \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{M}_j \boldsymbol{cov}_{t-j} \boldsymbol{M}'_j, \tag{14}$$

gdzie $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}_i$ oraz $\boldsymbol{M}_j$ są macierzami parametrów o wymiarach $N \times N$, a macierz $\boldsymbol{K}$ jest macierzą trójkątną. $\boldsymbol{G}_{t-i}$ są macierzami kowariancji stóp zwrotu szacowanymi z wykorzystaniem cen minimalnych i maksymalnych. Wariancje stóp zwrotu konstruowane na podstawie cen minimalnych i maksymalnych znajdują się na przekątnych macierzy $\boldsymbol{G}_{t-i}$, natomiast kowariancje stóp zwrotu formułowane na podstawie wzoru (11) znajdują się poza przekątnymi. Wszystkie wariancje w formule (11) są estymowane z zastosowaniem cen minimalnych i maksymalnych. W porównaniu do tradycyjnego modelu BEKK w miejsce wariancji i kowariancji stóp zwrotu szacowanych na podstawie cen zamknięcia, zastosowano efektywniejsze estymatory wariancji i kowariancji formułowane z wykorzystaniem cen minimalnych i maksymalnych. W modelu BEKK-HL w macierzach $\boldsymbol{G}_{t-i}$ mogą być zastosowane różne rodzaje estymatorów wariancji konstruowane na podstawie cen minimalnych, maksymalnych lub dodatkowo otwarcia i zamknięcia jak np. Garmana–Klassa (Garman i Klass, 1980), Parkinsona (1980) lub Rogersa–Satchella (Rogers i Satchell, 1991). W badaniu empirycznym w następnych sekcjach artykułu zastosowano, podobnie jak w pracach Brunetti i Lildholdt (2002) oraz Brand i Diebold (2006), estymator Parkinsona.

Zaproponowany model nie ma żadnych dodatkowych parametrów w stosunku do tradycyjnego modelu BEKK formułowanego na podstawie stóp zwrotu z cen zamknięcia. Parametry obu modeli BEKK i BEKK-HL mogą być estymowane za pomocą metod największej wiarygodności lub quasi największej wiarygodności.

4. Modelowanie kursów walutowych na rynku Forex

Użyteczność zaproponowanego modelu została zilustrowana na podstawie analizy trzech najbardziej płynnych par walutowych na rynku FOREX: EUR/USD, USD/JPY oraz GBP/USD. Zastosowano dane dzienne dla 11-letniego okresu od 2 stycznia 2006 do 30 grudnia 2016 (2853 logarytmiczne stopy zwrotu). Rozważano trzy konkurencyjne modele:

(1) Klasyczny model BEKK, którego parametry estymowane są na podstawie wyłącznie cen zamknięcia jako benchmark model (równanie (13));

(2) Zaproponowany model BEKK-HL, którego parametry estymowane są na podstawie cen minimalnych, maksymalnych i zamknięcia (równanie (14));

(3) Model DCC (ang. *dynamic conditional correlations*, Engle, 2002), którego parametry estymowane są na podstawie wyłącznie cen zamknięcia. Model DCC jest modelem mniej złożonym, łatwiejsza jest estymacja jego parametrów; z tego względu jest naturalnym konkurentem dla modeli BEKK.

Jako warunkową funkcję gęstości prawdopodobieństwa przyjęto wielowymiarowy rozkład t-Studenta. Badane kursy walutowe nie były skointegrowane (test Johansena) oraz nie występowały stałe zależności w równaniach średnich warunkowych stóp zwrotu (model VAR), dlatego w równaniach opisujących warunkowe wartości oczekiwane stóp zwrotu występują tylko stałe. Do estymacji parametrów wszystkich rozważanych modeli zastosowano metodę MNW. Wyniki estymacji zostały zaprezentowane w tabeli 1.

Logarytmy funkcji wiarygodności zostały skonstruowane dla wszystkich trzech modeli na podstawie cen zamknięcia (oznaczone jako ln L). Wyznaczono wartości statystyki Riversa-Vuonga (Rivers i Vuong, 2002) oznaczonej dalej jako RV. Test ten pozwala na weryfikację hipotezy o asymptotycznej równości funkcji wiarygodności dwóch niezagnieżdżonych modeli. Jest on rozszerzeniem testu Vuonga (1989) i może być stosowany m.in. w przypadku modeli szeregów czasowych. Wyniki testu RV wskazują, że model BEKK-HL lepiej opisywał badane kursy walutowe niż konkurujące modele konstruowane na podstawie tylko cen zamknięcia. Nie było natomiast istotnych różnic między modelami BEKK i DCC estymowanymi na podstawie stóp zwrotu z cen zamknięcia. Kryterium informacyjne Schwarza również wskazuje model BEKK-HL jako najlepszy.

DOI 10.7172/1644-9584.76.3

Parametr	BEKK		Parametr	BEKK-HL		Parametr	DCC	
	Ocena	**Błąd stand.**		**Ocena**	**Błąd stand.**		**Ocena**	**Błąd stand.**
γ_{01}	0,0047	0,0086	γ_{01}	0,0005	0,0117	γ_{01}	0,0022	0,0092
γ_{02}	-0,0152	0,0090	γ_{02}	-0,0091	0,0125	α_{01}	0,0005	0,0005
γ_{03}	0,0066	0,0083	γ_{03}	-0,0008	0,0106	α_{11}	0,0401	0,0057
c_{11}	-0,0286	0,0089	k_{11}	-0,0101	0,0180	β_{11}	0,9588	0,0056
c_{21}	-0,0104	0,0213	k_{21}	0,0314	0,0732	v	9,6468	1,5830
c_{22}	0,0674	0,0092	k_{22}	0,0585	0,1433	γ_{02}	-0,0117	0,0094
c_{31}	-0,0085	0,0160	k_{31}	0,0179	0,0259	α_{02}	0,0034	0,0015
c_{32}	-0,0183	0,0089	k_{32}	-0,0284	0,0365	α_{12}	0,0596	0,0104
c_{33}	0,0332	0,0077	k_{33}	0,0021	0,1009	β_{12}	0,9362	0,0109
d_{11}	0,1874	0,0180	l_{11}	0,2678	0,0370	v	5,0514	0,4775
d_{12}	-0,0314	0,0132	l_{12}	-0,0636	0,0220	γ_{03}	0,0034	0,0088
d_{13}	0,0083	0,0194	l_{13}	0,0086	0,0376	α_{03}	0,0016	0,0009
d_{21}	0,0189	0,0209	l_{21}	0,0259	0,0439	α_{13}	0,0458	0,0080
d_{22}	0,2350	0,0177	l_{22}	0,3074	0,0322	β_{13}	0,9503	0,0084
d_{23}	-0,0549	0,0242	l_{23}	-0,0741	0,0472	v	9,3613	2,0626
d_{31}	-0,0205	0,0253	l_{31}	-0,0101	0,0352	α	0,0278	0,0042
d_{32}	-0,0506	0,0150	l_{32}	-0,0670	0,0222	β	0,9351	0,0122
d_{33}	0,2090	0,0205	l_{33}	0,2658	0,0322	v	4,9512	0,0840
e_{11}	0,9825	0,0037	m_{11}	0,9616	0,0110			
e_{12}	0,0087	0,0037	m_{12}	0,0240	0,0094			
e_{13}	-0,0042	0,0044	m_{13}	-0,0056	0,0130			
e_{21}	-0,0034	0,0048	m_{21}	-0,0003	0,0144			
e_{22}	0,9650	0,0051	m_{22}	0,9403	0,0137			
e_{23}	0,0139	0,0063	m_{23}	0,0161	0,0155			
e_{31}	0,0054	0,0058	m_{31}	0,0022	0,0118			
e_{32}	0,0149	0,0047	m_{32}	0,0287	0,0100			
e_{33}	0,9728	0,0053	m_{33}	0,9569	0,0105			
v	6,7657	0,4632	v	7,2524	0,8290			
ln L	-6162,20		ln L	-6087,19		ln L	-6179,16	
RV	-		RV	3,0246*		RV	1,5784	
BIC	12547		BIC	12397		BIC	12494	

We wszystkich modelach pary walutowe zostały zastosowane w następującej kolejności: EUR/ USD, JPY/ USD i GBP/USD. g_{01}, g_{02}, g_{03} są stałymi, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij} oraz k_{ij}, l_{ij}, m_{ij} są parametrami odpowiednio w macierzach $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{E}_1$ (równanie (13)) oraz $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{M}_1$ (równanie (14)), α_{0i} α_{1i} β_{1i} są parametrami jednorównaniowych modeli GARCH, α, β są parametrami modelu DCC, parametr v oznacza liczbę stopni swobody warunkowego rozkładu t Studenta, ln L jest logarytmem funkcji wiarygodności, RV to statystyka testu Riversa-Vuonga, gdzie benchmarkiem, z którym porównywano inne modele, był model BEKK, którego parametry estymowano wyłącznie na podstawie cen zamknięcia, * oznacza, że hipoteza zerowa została odrzucona na poziomie 0,05, BIC to Bayesowskie kryterium informacyjne.

Tab. 1. Wyniki estymacji dla trzech wielorównaniowych modeli GARCH

Porównując szacunki parametrów między modelami BEKK i BEKK-HL, można zauważyć wyraźne różnice. Szacunki parametrów l_{ii} były większe niż szacunki parametrów d_{ii}, natomiast szacunki parametrów m_{ii} były mniejsze niż szacunki parametrów e_{ii}. Rozważając różne scenariusze stóp zwrotu, można łatwo wykazać, że wpływ zjawisk szokowych w poprzednim okresie na bieżące wartości kowariancji jest silniejszy, a zatem reakcja na zmieniającą się sytuację rynkową jest szybsza, według modelu, w którym zastosowano dodatkowo ceny minimalne i maksymalne. Jest to ważne zarówno w kontekście modelowania, jak i prognozowania stóp zwrotu, ponieważ wolna reakcja na nagłe zmiany rynkowe była dotychczas wymieniana jako jedna z największych słabości modeli klasy GARCH formułowanych na podstawie cen zamknięcia.

5. Prognozowanie kowariancji stóp zwrotu

Głównym celem badania było porównanie trafności prognoz budowanych na podstawie zaproponowanego modelu GARCH, formułowanego z wykorzystaniem cen minimalnych i maksymalnych z prognozami wyznaczanymi z modelu konstruowanego na podstawie wyłącznie cen zamknięcia. Parametry modelu były estymowane każdego dnia na podstawie próby o stałej długości 520 obserwacji (w przybliżeniu 2 lata). Jednodniowe prognozy kowariancji konstruowano dla okresu 2008–2016 (9 lat).

Jako realizację kowariancji do oceny trafności prognoz przyjmowano sumę iloczynów 15-minutowych stóp zwrotu (tzw. kowariancję zrealizowaną). Przyjęto dwie miary oceny dokładności prognoz: błąd średniokwadratowy (MSE) oraz średni błąd bezwzględny (MAE). Zbadano, czy różnice między prognozami rozważanych modeli były istotne statystycznie. W tym celu zastosowano dwa testy: SPA (ang. *superior predictive ability*, Hansen, 2005) oraz MCS (ang. *model confidence set*, Hansen, Lunde i Nason, 2011). Test SPA został przeprowadzony dla par modeli, wśród których model BEKK na podstawie stóp zwrotu z cen zamknięcia stosowany był jako benchmark. Test MCS został przeprowadzony dla trzech modeli łącznie. Wyniki badania trafności prognoz kowariancji zostały przedstawione w tabeli 2.

Wyniki testu SPA – zarówno dla miary MSE, jak i MAE (zob. tabela 2, ale również niezaprezentowane, z uwagi na ograniczenie długości artykułu, wyniki, gdy model DCC został zastosowany jako benchmark) wskazują, że prognozy kowariancji stóp zwrotu konstruowane na podstawie modeli formułowanych wyłącznie z wykorzystaniem cen zamknięcia były mniej dokładne od prognoz z modelu, którego parametry estymowane są na podstawie cen minimalnych, maksymalnych i zamknięcia (dla przyjętego poziomu istotności 0,05). Te same wnioski wynikają z zastosowania testu MCS. Jedynym wyjątkiem jest zależność między parami EUR/USD i GBP/USD dla miernika MSE, dla której wszystkie trzy modele należą do zbioru ufności modeli, zatem brakuje podstaw do odrzucenia hipotezy o ich tej samej zdolności predykcyjnej.

 DOI 10.7172/1644-9584.76.3

Model	Kryteria oceny prognoz					
	MSE	**SPA p-wartość**	**MCS p-wartość**	**MAE**	**SPA p-wartość**	**MCS p-wartość**
EUR/USD, JPY/USD						
BEKK ceny zamknięcia	0,089	-	0,004	0,138	-	0,000
BEKK-HL	0,085	0,002	1,000*	0,130	0,000	1,000*
DCC ceny zamknięcia	0,101	0,536	0,001	0,139	0,654	0,000
EUR/USD, GBP/USD						
BEKK ceny zamknięcia	0,120	-	0,245*	0,135	-	0,000
BEKK-HL	0,116	0,049	1,000*	0,126	0,000	1,000*
DCC ceny zamknięcia	0,118	0,022	0,336*	0,129	0,000	0,035
JPY/USD, GBP/USD						
BEKK ceny zamknięcia	0,206	-	0,095	0,122	-	0,000
BEKK-HL	0,201	0,029	1,000*	0,112	0,000	1,000*
DCC ceny zamknięcia	0,209	0,686	0,094	0,121	0,253	0,001

Test SPA został przeprowadzony dla par modeli, wśród których model BEKK na podstawie stóp zwrotu z cen zamknięcia stosowany był jako benchmark, * oznacza, że przy współczynniku ufności 0,90 model należy do zbioru ufności modeli.

Tab. 2. Ocena prognoz kowariancji

6. Zakończenie

Ceny minimalne i maksymalne dostarczają cennych informacji o kształtowaniu się procesów finansowych. Wiadomo, że wykorzystanie takich informacji w modelach zmienności może zwiększać dokładność pomiaru zmienności oraz zwiększać trafność prognoz zmienności w porównaniu do modeli formułowanych na podstawie wyłącznie cen zamknięcia (zob. np. Fiszeder i Perczak, 2016). W ostatnich latach w kilku pracach pokazano, że zastosowanie cen minimalnych i maksymalnych może być równie korzystne przy estymacji i prognozowaniu kowariancji stóp zwrotu.

W pracy zaproponowano nową specyfikację modelu BEKK z zastosowaniem cen minimalnych i maksymalnych do opisu dynamiki kursów walutowych. Model lepiej opisuje stopy zwrotu najbardziej płynnych par walutowych na rynku Forex. Prognozy kowariancji konstruowane na podstawie zaproponowanego modelu są trafniejsze w porównaniu z prognozami formułowanymi z modeli na cenach zamknięcia. Należy podkreślić, że przedstawiona propozycja modelu nie wymaga pozyskania dodatkowych danych, ponieważ dzienne ceny minimalne i maksymalne są na ogół dostępne równolegle z cenami zamknięcia, co jest ważne z punktu widzenia aplikacji modelu na rynku Forex.

Przypisy

1 Praca została sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki projekt numer 2016/21/B/HS4/00662 pt. „Wielowymiarowe modele zmienności – wykorzystanie cen minimalnych i maksymalnych".

2 Nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk autorów.

Bibliografia

Alizadeh, S., Brandt, M. i Diebold, F.X. (2002). Range-Based Estimation of Stochastic Volatility Models, *Journal of Finance*, *57*, 1047–1091, https://doi.org/10.1111/1540-6261.00454

Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X. i Labys, P. (2003). Modeling and Forecasting Realized Volatility. *Econometrica*, *71*(2), 579–625, https://doi.org/10.1111/1468-0262.00418

Arroyo, J., González-Rivera, G. i Maté, C. (2010). Forecasting with Interval and Histogram Data: Some Financial Applications. W: A. Ullah i D.E.A. Giles (red.), *Handbook of Empirical Economics and Finance*. Taylor & Francis Group, https://doi.org/10.1201/b10440-11

Asai, M. (2013). Heterogeneous Asymmetric Dynamic Conditional Correlation Model with Stock Return and Range. *Journal of Forecasting*, *32*(5), 469–480, https://doi.org/10.1002/for.2252

Baba, Y., Engle, R.F., Kraft, D.F. i Kroner, K.F. (1990). *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*, Working Paper, Department of Economics, University of California at San Diego.

Brandt, M.W. i Diebold F.X. (2006). A No-Arbitrage Approach to Range-Based Estimation of Return Covariances and Correlations. *Journal of Business*, *79*(1), 61–73, https://doi.org/10.1086/497405

Brandt, M. i Jones, C. (2006). Volatility Forecasting with Range-Based EGARCH Models. *Journal of Business and Economic Statistics*, *24*, 470–486, https://doi.org/10.1198/073500106000000206

Brunetti, C. i Lildholdt, P.M. (2002). *Return-Based and Range-Based (Co)variance estimation, with an Application to Foreign Exchange Markets*, Technical Report 127, Center for Analytical Finance, University of Aarhus.

Chou, R.Y. (2005). Forecasting Financial Volatilities with Extreme Values: The Conditional Autoregressive Range (CARR) Model. *Journal of Money, Credit and Banking*, *37*(3), 561–582, https://doi.org/10.1353/mcb.2005.0027

Chou, R.Y. i Cai, Y. (2009). Range-Based Multivariate Volatility Model with Double Smooth Transition in Conditional Correlation. *Global Finance Journal*, *20*(2), 137–152, https://doi.org/10.1016/j.gfj.2008.12.001

Chou, R.Y., Wu, C.C. i Liu, N. (2009). Forecasting Time-Varying Covariance with a Range-Based Dynamic Conditional Correlation model. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, *33*, 327–345, https://doi.org/10.1007/s11156-009-0113-3

Engle, R.F. (2002). Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models. *Journal of Business and Economic Statistics*, *20*, 339–350, https://doi.org/10.1198/073500102288618487

 DOI 10.7172/1644-9584.76.3

Engle, R.F. i Kroner, K.F. (1995). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory*, *11*, 122–150, https://doi.org/10.1017/S0266466600009063

Fiszeder, P. i Perczak, G. (2016). Low and High Prices Can Improve Volatility Forecasts During the Turmoil Period. *The International Journal of Forecasting*, *32*(2), 398–410, https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2015.07.003

Garman, M.B. i Klass, M.J. (1980). On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data. *The Journal of Business*, *53*(1), 67–78, https://doi.org/10.1086/296072

Hansen, P.R. (2005). A Test for Superior Predictive Ability. *Journal of Business & Economic Statistics*, *23*(4), 365–380, https://doi.org/10.1198/073500105000000063

Hansen, P.R., Lunde, A. i Nason, J.M. (2011). The Model Confidence Set. *Econometrica*, *79*, 453–497, https://doi.org/10.3982/ECTA5771

Lopez, J.A. i Walter, C.A. (2001). Evaluating Covariance Matrix Forecasts in a Value-at-Risk Framework. *The Journal of Risk*, *3*(3), 69–97, https://doi.org/10.21314/JOR.2001.044

Maia, A.L.S. i de Carvalho, F.A.T. (2011). Holt's Exponential Smoothing and Neural Network Models for Forecasting Interval-Valued Time Series. *International Journal of Forecasting*, *27*(3), 740–759, https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2010.02.012

Mandelbrot, B. (1971). When Can Price be Arbitraged Efficiently? A Limit to Validity of the Random Walk and Martingale Models. *Review of Economics and Statistics*, *53*, 225–236, https://doi.org/10.2307/1937966

Mapa, D. (2003). A Range-Based GARCH Model for Forecasting Volatility. *The Philippine Review of Economics*, *60*(2), 73–90.

Nison, S. (1991). *Japanese Candlestick Charting Techniques*. New York Institute of Finance.

Parkinson, M. (1980). The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return. *The Journal of Business*, *53*(1), 61–65, https://doi.org/10.1086/296071

Rivers, D. i Vuong, Q. (2002). Model selection tests for nonlinear dynamic models. *The Econometrics Journal*, 5(1), 1–39, https://doi.org/10.1111/1368-423X.t01-1-00071

Rogers, L.C.G. i Satchell, S.E. (1991). Estimating Variance From High, Low and Closing Prices. *The Annals of Applied Probability*, *1*(4), 504–512, https://doi.org/10.1214/aoap/1177005835

Taylor, S.J. (1987). Forecasting the Volatility of Currency Exchange Rates. *International Journal of Forecasting*, *3*(1), 159–170, https://doi.org/10.1016/0169-2070(87)90085-9

Wilder, W. (1978). *New Concepts in Technical Trading Systems*. Greensboro, NC: Trend Research.

Vuong, Q.H. (1989). Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Nonnested Hypotheses. *Econometrica*, *57*(2), 307–333, https://doi.org/10.2307/1912557